GEOMETRÍA

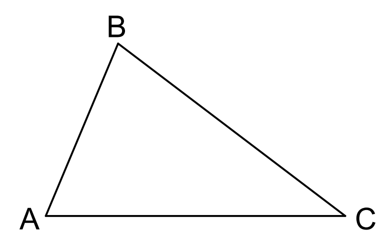
TRIÁNGULOS

1.- DEFINICIÓN:

Si A, B y C son tres puntos no colineales entonces la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denomina triángulo y se denota como Δ ABC.

$$\Delta\ ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} \ \ / \text{ A, B y C son puntos no colineales}$$

1.1. Vértices y Lados

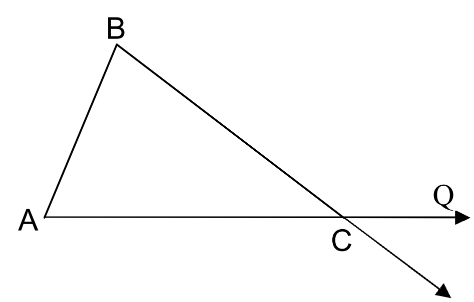


Vértices: Son cada uno de los puntos A, B y C.

Lados: Son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

1.2. Ángulos de un Triángulo

Todo triángulo determina tres ángulos. Así el triángulo ABC determina los ángulos ABC, BCA y BAC, los cuáles se denominan ángulos o ángulos internos del triángulo ABC.



Un ángulo externo de un triángulo es el ángulo adyacente y suplementario de un ángulo del triángulo, es decir es cada uno de los ángulos que determina un par lineal con un ángulo interno
del triángulo

Ejemplo: $\angle$BCQ

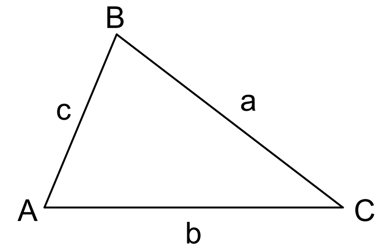
1.3. Interior y exterior de un triángulo

El interior de un triángulo es el conjunto de todos los puntos que son interiores a cada uno de los ángulos del triángulo. El exterior de un triángulo es el conjunto de todos los puntos que no están ni en el triángulo ni en su interior.

1.4. Perímetro del triángulo

Es la suma de las longitudes de los tres lados del triángulo y es denotada como 2p.

$$2p = a + b + c$$



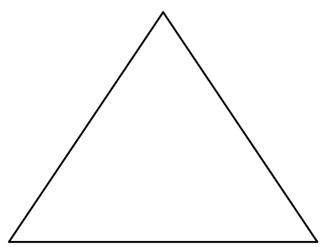
El semiperímetro es denotada como p y es igual a

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

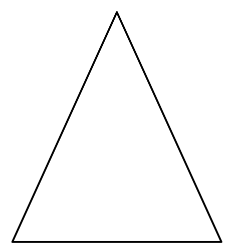
2. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

2.1. Según sus lados

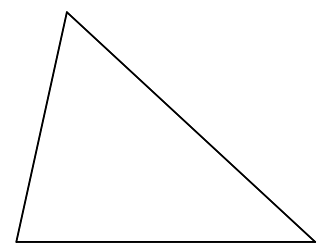
Triángulo equilátero; si sus tres lados son congruentes.
Triángulo isósceles; si sólo tiene dos lados congruentes.
Triángulo escaleno; si ningún par de sus lados son congruentes.



Triángulo equilátero



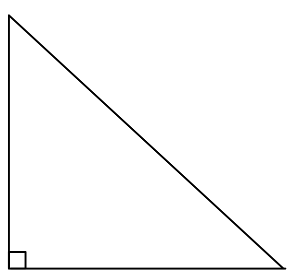
Triángulo isósceles



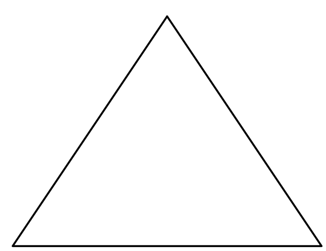
Triángulo escaleno

2.2. Según sus ángulos

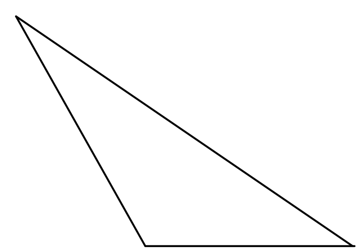
Triángulo rectángulo, si tiene un ángulo recto.
Triángulo oblicuángulo, si no tiene un ángulo recto.
Si los tres ángulos son agudos, se llama triángulo acutángulo, si uno de sus ángulos es obtuso, se llama triángulo obtusángulo.



Triángulo rectángulo



Triángulo acutángulo

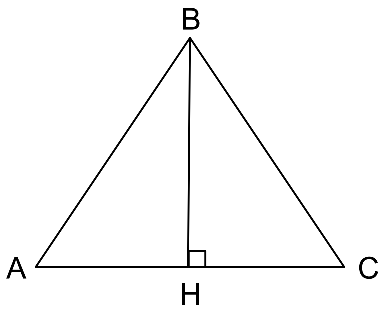


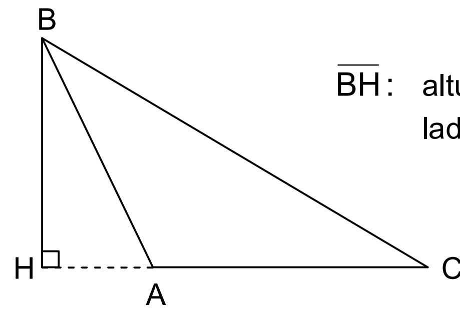
Triángulo obtusángulo

3. LÍNEAS NOTABLES

3.1 Altura

Segmento perpendicular a un lado del triángulo trazado desde el vértice opuesto hasta la recta que contiene a dicho lado. El **Ortocentro** es el punto de intersección de las alturas(o de sus prolongaciones) de un triángulo.





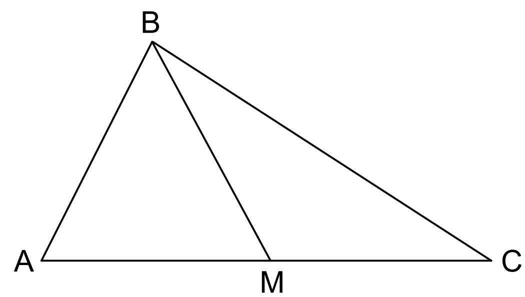
$\overline{BH}$: altura relativa al lado $\overline{AC}$.

3.2. Mediana

Segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto. Se denomina **Baricentro** al punto de intersección de las medianas de un triángulo.

M : Punto medio de $\overline{AC}$.

$\overline{BM}$: mediana relativa al lado $\overline{AC}$.

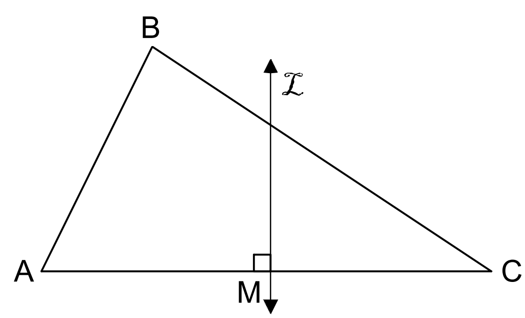


3.3. Mediatriz

Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio. Se denomina **Circuncentro** al punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo.

M : Punto medio de $\overline{AC}$.

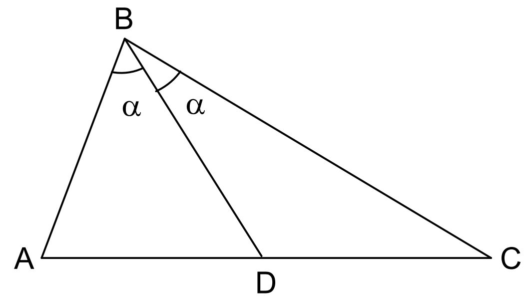
$\mathcal{L}$: mediatriz del lado $\overline{AC}$.



3.4. Bisectriz interior

Segmento de una bisectriz de un ángulo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice del ángulo y un punto del lado opuesto. Se denomina **Incentro** al, punto de intersección de las bisectrices interiores de un triangulo.

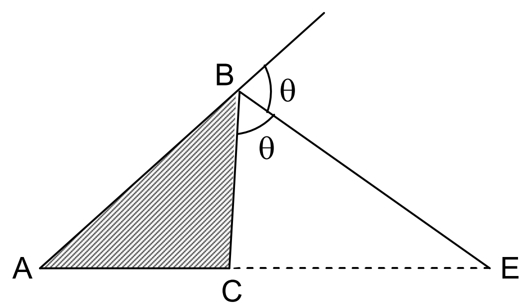
$\overline{BD}$: bisectriz interior relativa al lado $\overline{AC}$.



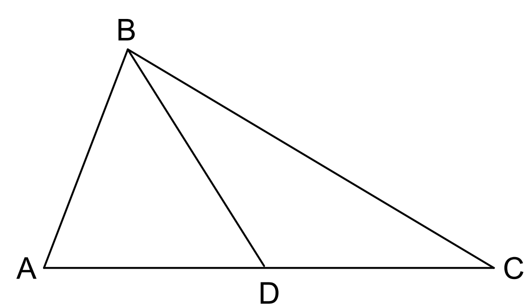
3.5. Bisectriz exterior

Segmento de una bisectriz de un ángulo externo de un triángulo cuyos extremos son el vértice del ángulo y un punto de la recta que contiene al lado opuesto. Se denomina Excentro al punto de intersección de las bisectrices de dos ángulos externos y un ángulo interno mide un triángulo.

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$.



Obs:
Se denomina ceviana al segmento cuyos extremos son un vértice y un punto cualquiera de lado opuesto a dicho vértice.
$\overline{BD}$: ceviana relativa al lado $\overline{AC}$.

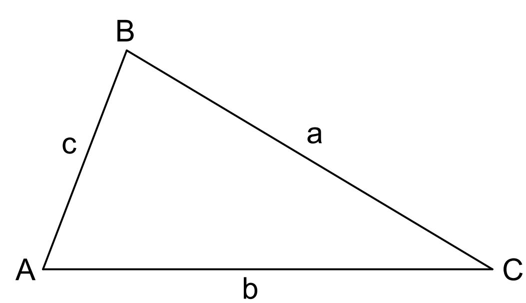


3. TEOREMAS FUNDAMENTALES

3.1. Teorema de la desigualdad triangular

En todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

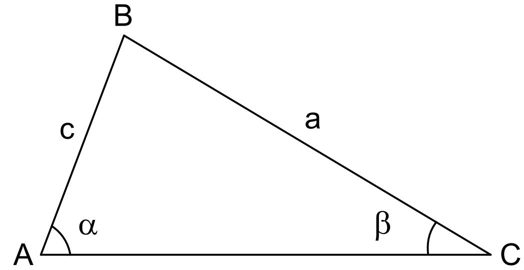
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$



3.2. Teorema de correspondencia

En todo triángulo al lado de mayor longitud le corresponde el ángulo de mayor medida. El reciproco de éste teorema es verdadero.

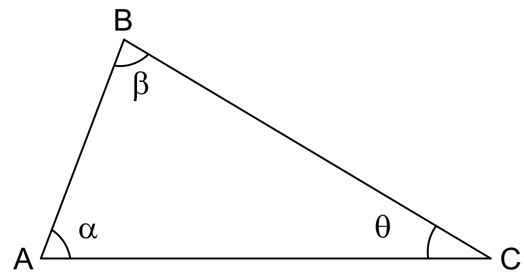
$a > c \leftrightarrow \alpha > \beta$



3.3. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos

La suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180º.

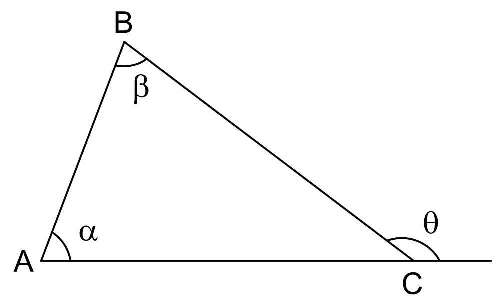
$\alpha + \beta + \theta = 180°$



3.4. Teorema del ángulo externo

La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes al ángulo externo.

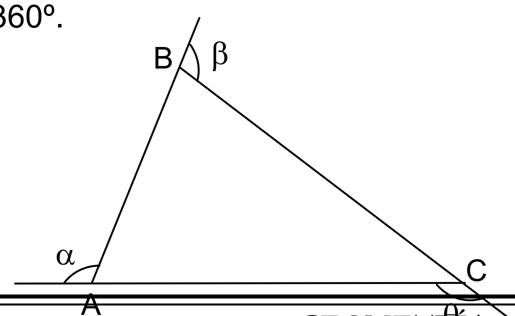
$\theta = \alpha + \beta$



3.5. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos externos

En todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es 360º.

$\alpha + \beta + \theta = 360°$

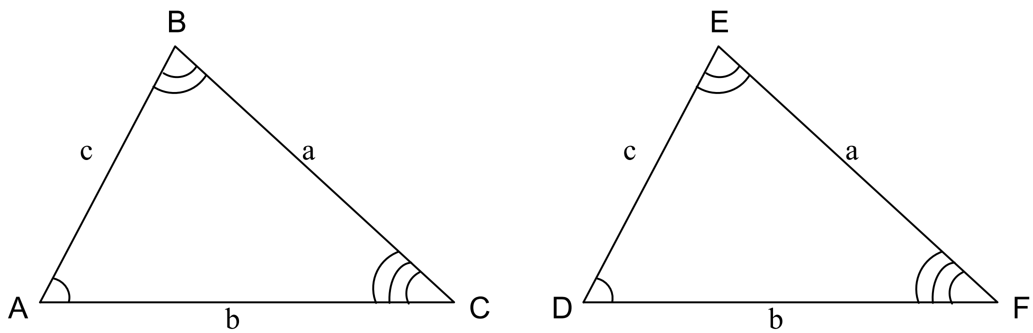


CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición.

1.- DEFINICIÓN:

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes, de tal modo que a lados congruentes le correspondan ángulos congruentes y viceversa.



En la figura los triángulos ABC y DEF son congruentes, lo cual se denota como:

$$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$$

y se lee triángulo ABC congruente con el triángulo DEF.

$$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} & \angle A \cong \angle D \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} & \angle B \cong \angle E \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} & \angle C \cong \angle F \end{cases}$$

Esta notación no solo expresa la congruencia de los triángulos sino además cuál es la congruencia. Es decir, el orden de los vértices establece una correspondencia entre ellos:

$A \leftrightarrow D \qquad B \leftrightarrow E \qquad$ y $\qquad C \leftrightarrow F$

De ahí que es posible establecer una correspondencia entre sus lados.

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}, \qquad \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF} \qquad$ y $\qquad \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$

y entre sus ángulos internos

$\angle A \leftrightarrow \angle D, \qquad \angle B \leftrightarrow \angle E \qquad$ y $\qquad \angle C \leftrightarrow \angle F$

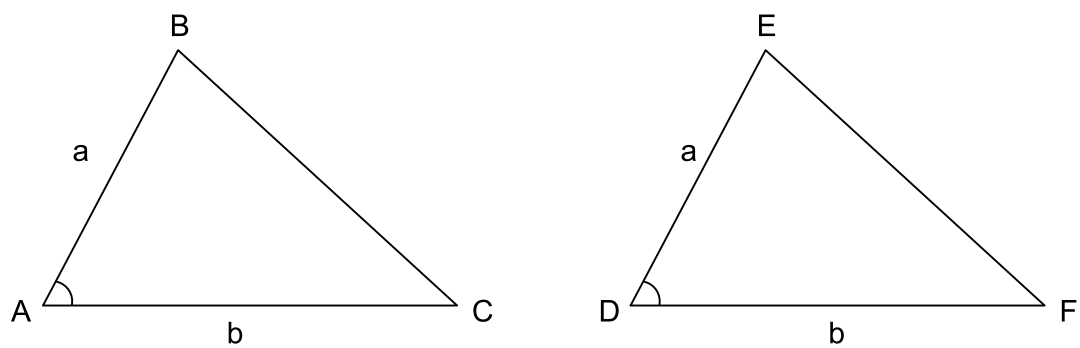
OBSERVACIONES:

a) Si $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$, entonces $\Delta\ ACB \cong \Delta\ DFE$.
b) Si $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$, es falso que $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DFE$.
c) La congruencia de triángulos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

2.- POSTULADO Y TEOREMAS DE LA CONGRUENCIA

Para determinar la congruencia de dos triángulos sólo es necesario establecer la congruencia de tres elementos los cuales deben estar en un orden determinado y por lo menos uno de ellos tiene que ser un lado. Se presenta el siguiente postulado.

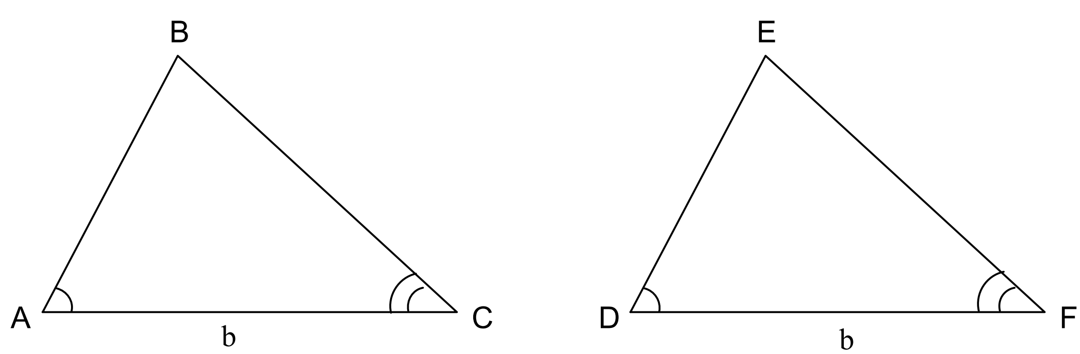
2.1. Postulado (congruencia LAL): Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre los dos lados, entonces los triángulos son congruentes.



Si:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \angle A \cong \angle D \\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ BAC \cong \Delta\ EDF$$

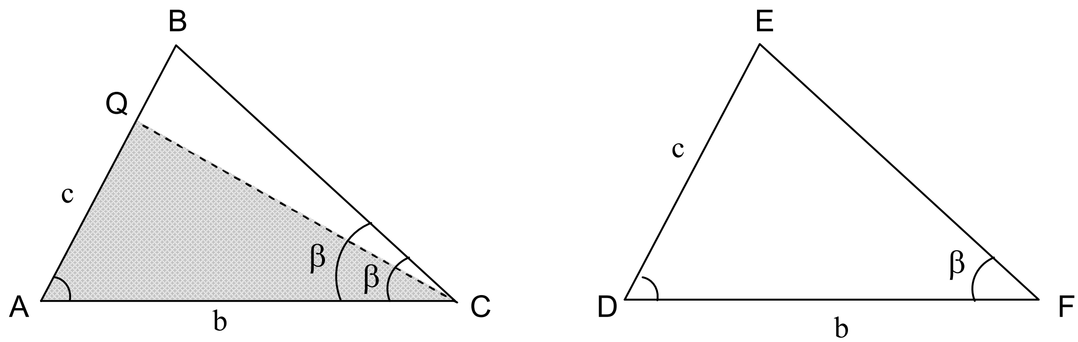
2.2. Teorema (congruencia ALA): Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes un lado y los ángulos adyacentes a este lado, entonces los triángulos son congruentes.



Si:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A \cong \angle D \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \angle C \cong \angle F\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ACB \cong \Delta\ DFE$$

<ins>**DEMOSTRACIÓN**</ins>:



. Supongamos que $\overline{AB} \ncong \overline{DE}$.

. Si AB > DE, sea $Q \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AQ} \cong \overline{DE}$.

. Δ QAC $\cong$ Δ EDF (LAL)

$\Rightarrow m\angle QCA = m\angle EFD = \beta$

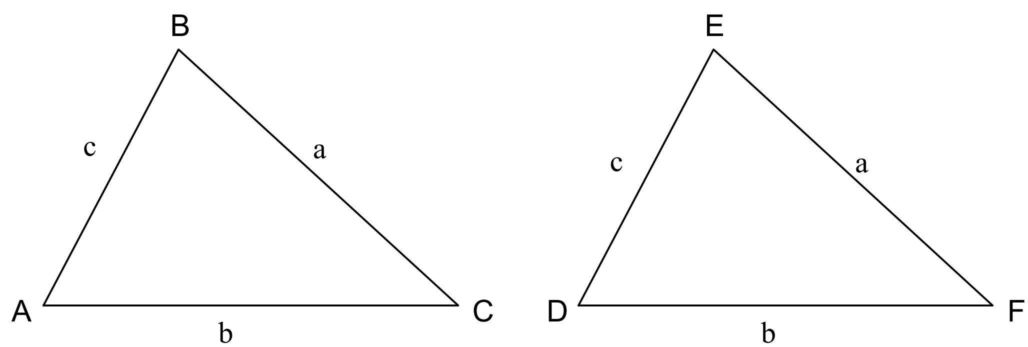
. Esto contradice el postulado de la construcción de un ángulo, entonces AB no es mayor que DE

. Si AB < DE, se prolonga AB y prosiguiendo de la misma manera se encuentra la misma contradicción, entonces AB no es menor que DE.

. Por lo tanto AB = DE entonces $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\Rightarrow \Delta$ ABC $\cong$ Δ DEF

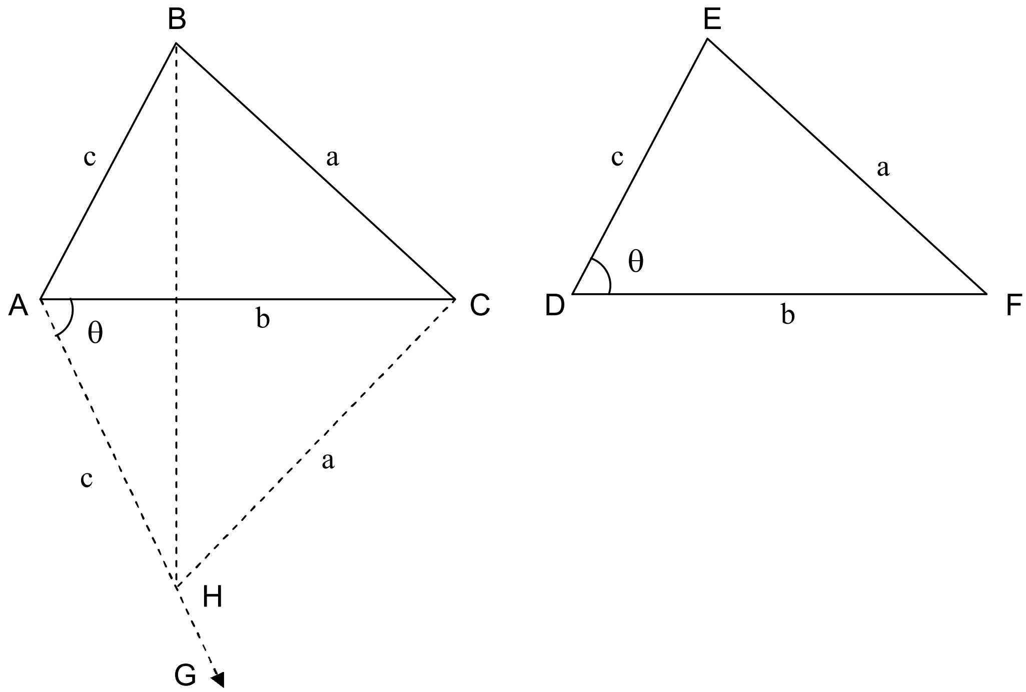
2.3. Teorema (congruencia LLL): Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes sus tres lados, entonces los triángulos son congruentes.



Si:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{DE}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$$

DEMOSTRACIÓN:



. Por el postulado de la construcción de un ángulo $\exists\ \overrightarrow{AG}\ /\ m\angle HAC = m\angle EDF = \theta$.

. Sea $H \in \overrightarrow{AG}\ /\ \overline{AH} \cong \overline{DE}$

$\Rightarrow \Delta\ CAH \cong \Delta\ FDE$

$\Rightarrow \overline{CH} \cong \overline{EF}$

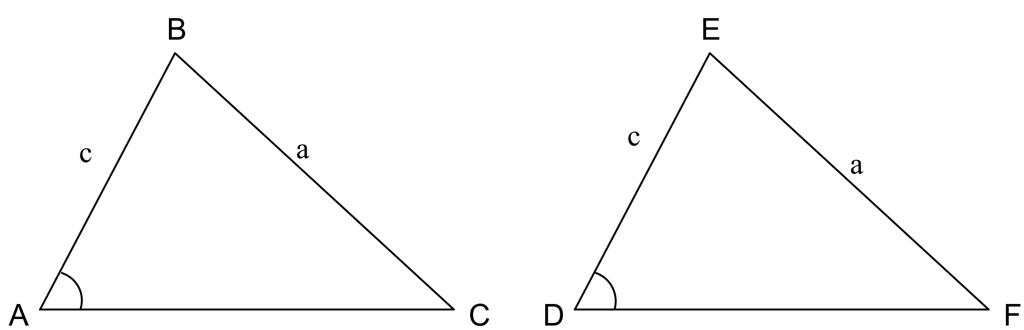
. Los triángulos BAH y BCH son isósceles $\Rightarrow m\angle ABC = m\angle AHC$

. $\Delta\ AHC \cong \Delta\ ABC$

$\therefore\quad \Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$

2.4. Corolario (congruencia LLA)

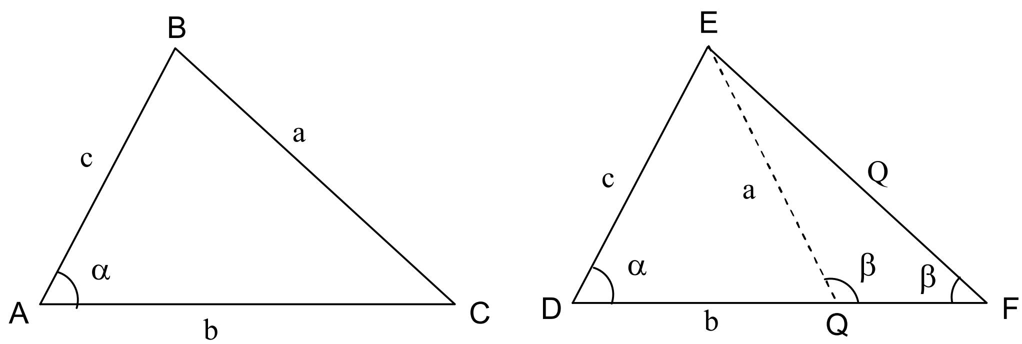
Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de éstos dos lados, entonces los triángulos son congruentes.



Si

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ BC > AB \\ \angle A \cong \angle D \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>:



. Δ DEF : $\alpha > \beta$

. Supongamos que $\overline{AC} \ncong \overline{DE}$

. Si $AC < \overline{DF}$, sea $Q \in \overline{DF}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DQ}$

. $\Delta\ BAC \cong \Delta\ EDQ\,(LAL)$
$\Rightarrow BC = EQ$

. Δ QEF isósceles
$\Rightarrow m\angle EQF = \beta$

. Δ DEF por ángulo exterior $\beta > \alpha$

. Lo cual es una concentración con la primera afirmación.

. Si AC > DF, prosiguiendo de la misma manera en el triángulo ABC se llega a la misma contradicción.

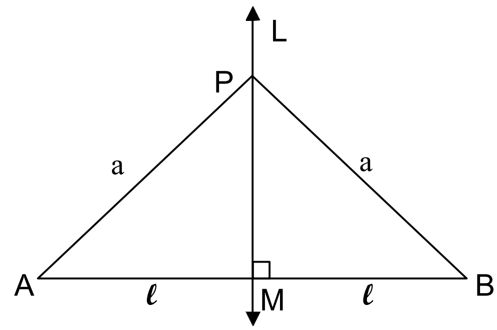
. Por lo tanto $\overline{AC} \cong \overline{DE}$.

. Por el caso LLL
$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$

3. APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

3.1 Teorema de la Mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.



DEMOSTRACIÓN

L: mediatriz de $\overline{AB}$ y $\forall$ $P \in L$

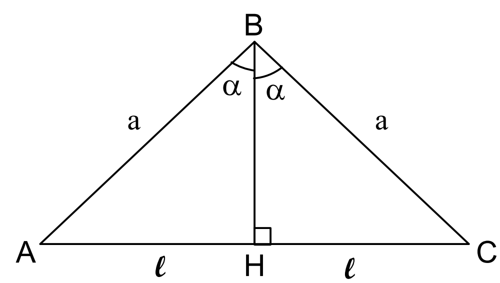
$\Rightarrow$ PDQ AP = PB

· $\triangle$ AMP $\triangle$ BMP(LAL)

$\Rightarrow$ AP = PB

3.2. Teorema

En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base, es también una mediana y una bisectriz interior.



DEMOSTRACIÓN

Δ ABC isósceles de base $\overline{AC}$

y $\overline{BH}$ altura relativa a la base $\overline{AC}$

$\Rightarrow$PDQ $\overline{BH}$: mediana y bisectriz interior.

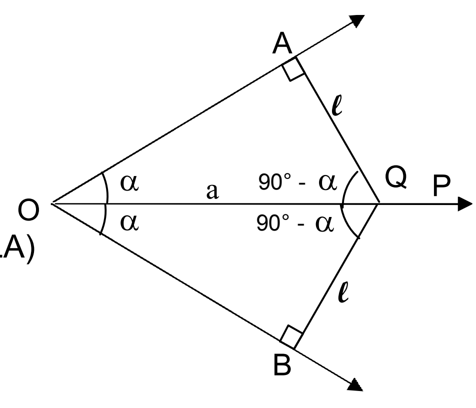
· $\triangle$AHB $\triangle$ CHB (congruencia LLA_M)

$\Rightarrow$AH = HC ($\overline{BH}$ mediana) y

m$\angle$ABH = m$\angle$CBH ($\overline{BH}$ bisectriz interior)

3.3. Teorema de la bisectriz

Todo punto de una bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



DEMOSTRACIÓN

$\overleftrightarrow{OP}$ bisectriz del $\angle$AOB y P $\overleftrightarrow{OP}$

$\Rightarrow$PDQ AP = PB

· $\triangle$OQA $\triangle$ OBQ (congruencia ALA)

$\Rightarrow$ QA = QB

3.4. Teorema de los puntos medios

Toda recta trazada por el punto medio de un lado de un triángulo paralela a otro lado, intersecta al tercer lado en su punto medio.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

BM = MA y L // $\overline{AC}$

$\Rightarrow$ PDQ BN = NC

· Sea $\overline{CQ}$ $\overline{MB}$

$\Rightarrow$ m$\angle$ AMC = m$\angle$MCQ y

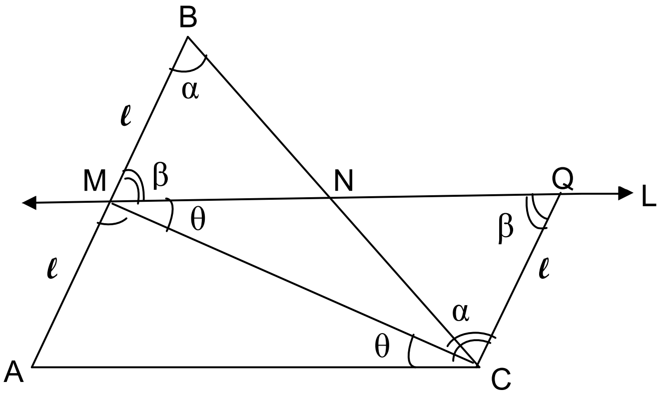
m$\angle$QMC = m$\angle$MCA

· Δ MAC ΔCQB (congruencia ALA)

$\Rightarrow$ AM = QC

· Δ MNB Δ QNC(congruencia ALA)

$\Rightarrow$ BN = NC



> ***Obs:***
> El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo se denomina base media.

3.5. Teorema de la base media

En todo triángulo una base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

$\overline{MN}$: base media

$\Rightarrow$ PDQ $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$ y $MN = \dfrac{AC}{2}$

· Sea $\overline{CQ}$ $\overline{MB}$

$\Rightarrow$ m$\angle$ MBC = m$\angle$NCQ = β y

m$\angle$AMC = m$\angle$MCQ = α + β

· Δ BMN ΔCQN (congruencia ALA)

$\Rightarrow$ MN = NQ = a y CQ = MB

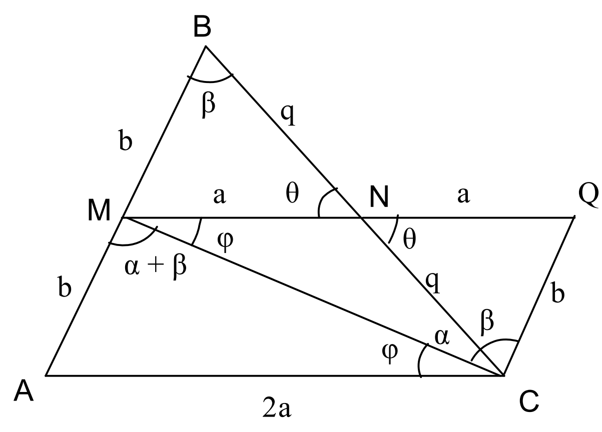
· Δ AMC Δ QCM (congruencia LAL)

$\Rightarrow$ m$\angle$ ACM = m$\angle$QMC = φ

$\Rightarrow$ $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$ y

AC = MQ = 2a

$\Rightarrow$ $MN = \dfrac{AC}{2}$



3.6. Teorema de la menor mediana en el triángulo rectángulo

La longitud de la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

DEMOSTRACIÓN

$\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

$\Rightarrow$ PDQ $\quad BM = \dfrac{AC}{2}$

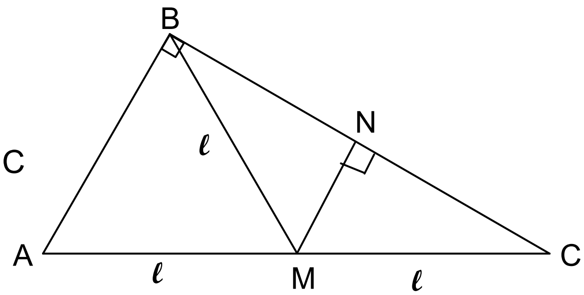
· Sea $\overline{MN}$ AB y AM = MC

$\Rightarrow$ BN = NC

· Teorema de la Mediatriz

$\Rightarrow$ BM = MC

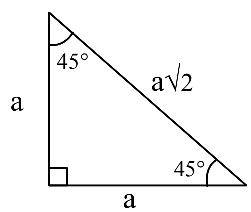
$\Rightarrow BM = \dfrac{AC}{2}$



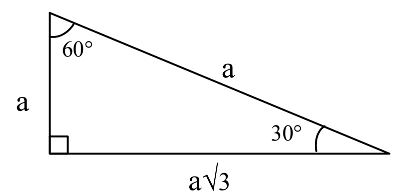
4. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos rectángulos que conociendo la medida de uno de sus ángulos agudos se conoce también la razón entre las longitudes de sus lados.

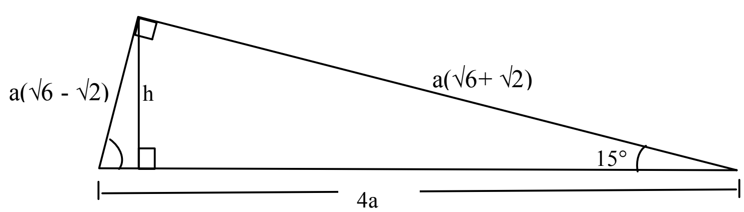
.TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE DE 45°



.TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE DE 30° Y 60°



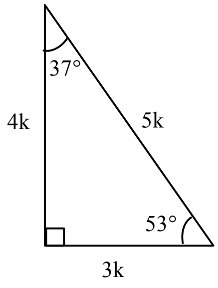
.TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE DE 15° Y 75°



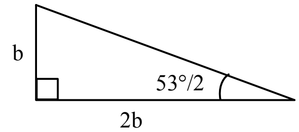
h = a

.TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS (de medidas de ángulos agudos aproximados)

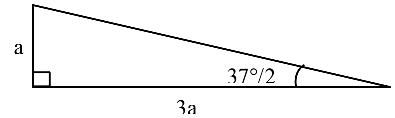
DE 37° Y 53°



DE 53°/2



DE 37°/2

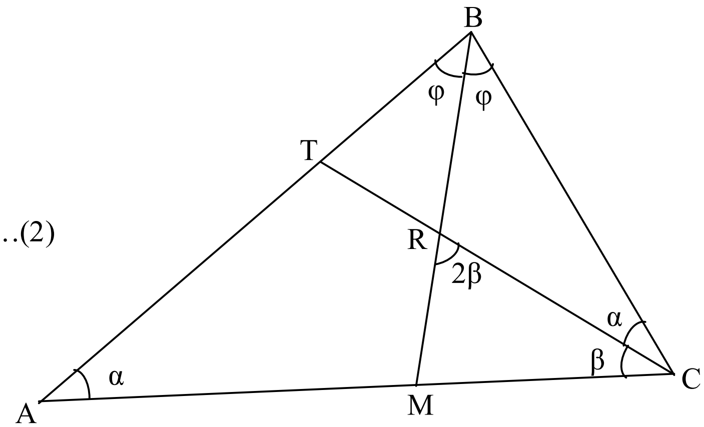


PROBLEMAS RESUELTOS

1 . En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior $\overline{BM}$ y la ceviana $\overline{CT}$, las cuales se intersecan en R. Si m∠MRC = 2m∠RCM y m∠RCB = m∠BAC, entonces la m∠RCM es

A) 45º B) 30º C) 36º D) 50º E) 42º

Resolución



· Δ MRC : por ángulo exterior

$2\beta = \alpha + \varphi$ ....(1)

· Δ ABC : $\alpha + 2\varphi + \alpha + \beta = 180°$

$\Rightarrow 2(\varphi + \alpha) + \beta = 180°$ ......(2)

· (1) en (2):

$2(2\beta) + \beta = 180°$

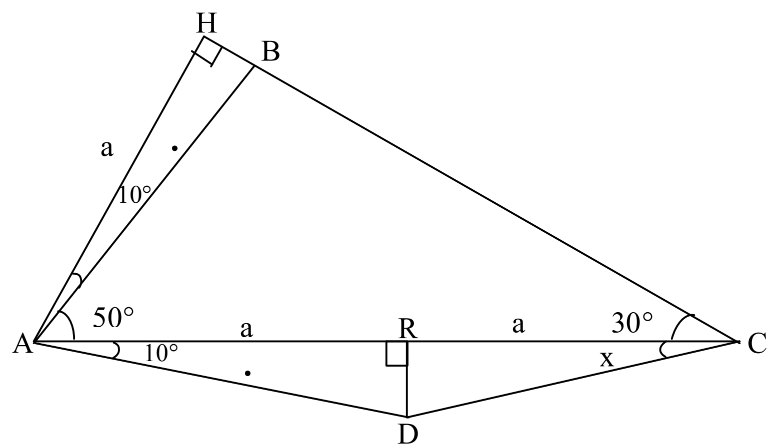
Por lo tanto

$\beta = 36°$

2. En el exterior de un triángulo ABC y relativo $\overline{AC}$ se ubica el punto . Si AB = AD, m∠BAC = 50°, m∠CAD = 10° y m∠ACB = 30°, entonces la m ∠ACD es.

A) 16º B) 20º C) 10º D) 15º E) 25º

Resolución



· ◺AHB notable (30° y 60°)

$\Rightarrow$ AC = 2 AH = 2ª

· ◺AHB ◺ARD (LAL)

$\Rightarrow$ m∠ARD = 90°

· Teorema de la Mediatriz

AD = DC

· Δ ADC isósceles

x = 10°

3. En un triángulo isósceles ABC, m∠ABC = 120, en $\overline{AC}$ se ubica el punto R y se trazan exteriormente los triángulos isósceles APR y CQR.
Si m∠APR = m∠RCQ = 120, demuestre que m∠PBQ = 60.

Demostración.

·Δ APR isósceles AR = $a\sqrt{3}$

·Δ RQC isósceles RC = $b\sqrt{3}$

·Δ ABC isósceles AB = BC = a+b

·Δ AMP equilátero MP = a

·Δ QNC equilátero QN = b

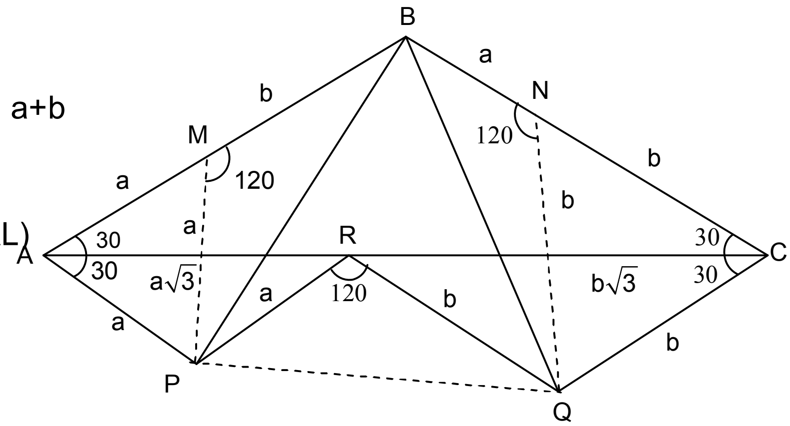
·Δ PMB Δ PRQ Δ BNQ (LAL)

PB = BQ = PQ

⇒ Δ PBQ equilátero

Por lo tanto

m ∠PBQ = 60



4. En el interior de un triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubica el punto I tal que m∠AIB = 90 y BC = 2(IN). Si N es el pinto medio de AC y la prolongación de NI intersecta a BC en M, entonces la m∠NMC es

A) 75 B) 60 C) 45 D) 36 E) 120

Resolución

· Δ AIB $\overline{IQ}$ mediana

⇒IQ = AQ = QB = a

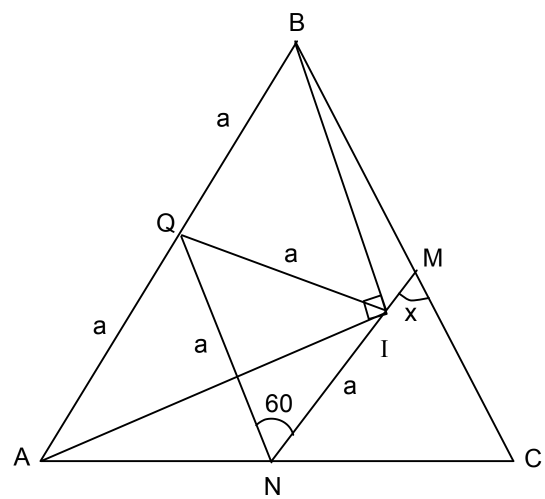
· Δ ABC $\overline{QN}$ Base Media

⇒ QN = a y $\overline{QN}$ // $\overline{BC}$

· Δ IQN equilátero

⇒ m∠QNI = 60

· $\overline{QN}$ // $\overline{BC}$ → x = 60



5. En un triángulo ABC (AB = BC) se ubica el punto T exterior y relativo a $\overline{CA}$, M es el punto medio de $\overline{BC}$, AC = $\sqrt{2}$ MT, m∠CBA = 4m∠CAT y m∠ATC = 90º. Entonces la m∠CAT es .

A) 18º B) 20º C) 10º D) 15º E) 30º

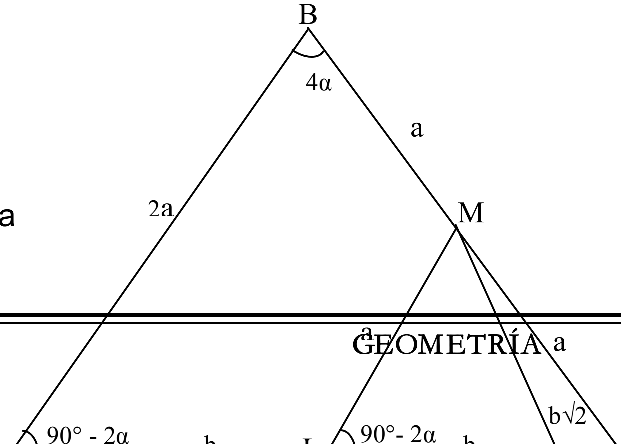
Resolución

· ◺ADC DL mediana

⇒ DL = b

· Δ ABC ML base media

⇒ $\overline{ML}$ $\overline{AB}$ y ML = a



$\Rightarrow m\angle MLD = 90° - 2\alpha$

· MLD notable (45°)
$\Rightarrow a = b$

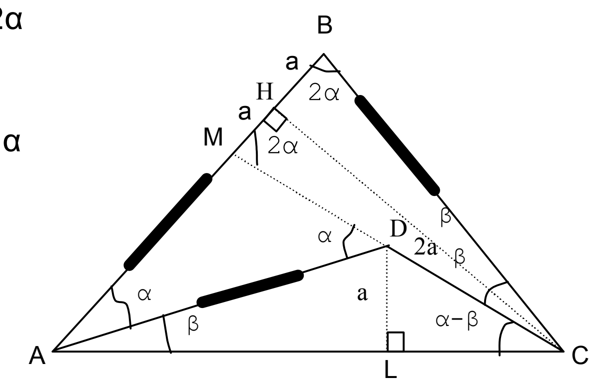
· Δ ABC : equilátero
$4\alpha = 60°$
$\alpha = 15°$

6. En el interior de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que AB = BC = AD, $m\angle ABC = 2\angle BAD$ y $m\angle BCD = 2\, m\angle CAD$. Entonces la $m\angle DAC$ es

A) 10 B) 30 C) 18 D) 20 E) 40

Resolución

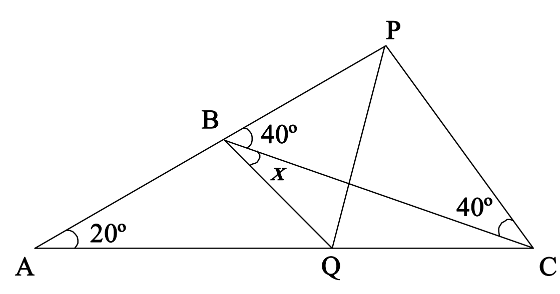
· De la figura Δ ABC isósceles : $m\angle ACD = \alpha - \beta$
· Δ AMC por ángulo exterior : $m\angle BMC = 2\alpha$
· ΔBCM isósceles : MC = BC
$\rightarrow$MH = HB = a
· Δ ADC por ángulo exterior : $m\angle ADM = \alpha$
$\Rightarrow$ Δ AMD isósceles
$\Rightarrow$ DC = MB = 2a
$\Rightarrow$ Δ ALB Δ CHB (ALA)
DL = BH = a
· DLC notable (30°)
$\Rightarrow$ $\alpha - \beta = 30°$……….(1)
· ΔBHC : $2\alpha + \beta = 90°$…………(2)
· De (1) y (2) :
$\beta = 10°$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, BP = QC. Halle x.

A) 30º
B) 36º
C) 40º
D) 45º
E) 60º



2. En un triángulo isósceles ADB (BD = AD) se traza la ceviana $\overline{AQ}$ y en su prolongación se ubica el punto C tal que BC = CD. Si m$\angle$CBD = 11 y m$\angle$QNI = 38, entonces la m$\angle$CQD es

A) 41° B) 36° C) 46° D) 48° E) 52°

3. En el exterior de un triángulo rectángulo ABC y relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto D, tal que m$\angle$ADC = 90º y AD = AB + CD. Si AB = 10 u y m$\angle$BAD = 60º, entonces la longitud de AC (en u) es

A) 10 B) $10\sqrt{3}$ C) 20 D) $10\sqrt{2}$ E) 15

4. Se tiene un triángulo ABC, $AB = BC = a$, donde a pertenece a los naturales, una recta secante intersecta a los lados AB y BC en F y E respectivamente y a la prolongación de $\overline{AC}$ en D, si la $m\angle ADF > m\angle ABC$, $AD = a$ y $EF = 3$. El mínimo valor entero de la longitud del segmento DE es:

A) a – 4 B) a – 2 C) a – 1 D) a + 1 E) a + 2

5. En la figura, los triángulos ABD y QBC son congruentes. Entonces la medida del ángulo BAC es

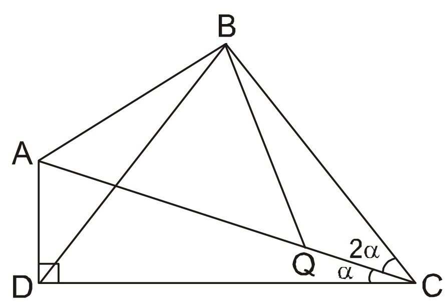
A) 54°

B) 76°

C) 75°

D) 72°

E) 80°



6. En un triángulo ABC, N es un punto de $\overline{BC}$, M es un punto de $\overline{AC}$ tal que AM = MN. Si m$\angle$ACN = 2m$\angle$NBA y m$\angle$BAN= 2m$\angle$NAM, entonces la medida del ángulo MNC es

A) 30° B) 36° C) 40° D) 45° E) 60°

7 . En un triángulo ABC (AB = BC) , m$\angle$ABC = 100º, en su interior se ubica el punto M tal que m$\angle$MAC = 30º y m$\angle$MCA = 20º.Entonces la m$\angle$MBA es

A) 18º B) 20º C) 10º D) 15º E) 30º

8 . En un triángulo ABC, en la prolongación de la ceviana $\overline{AQ}$ se ubica el punto D. Si m$\angle$CBD = 3m$\angle$BCA = 3m$\angle$BDA, m$\angle$BAC = 2m$\angle$BDA, AC = CD y QD = 2AB + BQ, entonces la medida del ángulo BDA es

A) 12º B) 18º C) 10º D) 20º E) 16º

Bibliografía

1. Encyclopedia Británica Inc., Benton, W., Publisher (1952). The thirteen Books of Euclid's elements. 1st edition. Editorial Encyclopedia Británica. The United States of America.
2. Moise, E. (1964). Elementary Geometry. 1ª edición. Editorial Addison Wesley publishing company Inc. The United States of America.
3. Helfgott, M. (1992). Geometría Plana. Editorial Escuela Activa S.A. Lima – Perú
4. Vega, F. (1961). Matemática Moderna 4. Editorial Colegio Militar Leoncio Prado. Lima - Perú