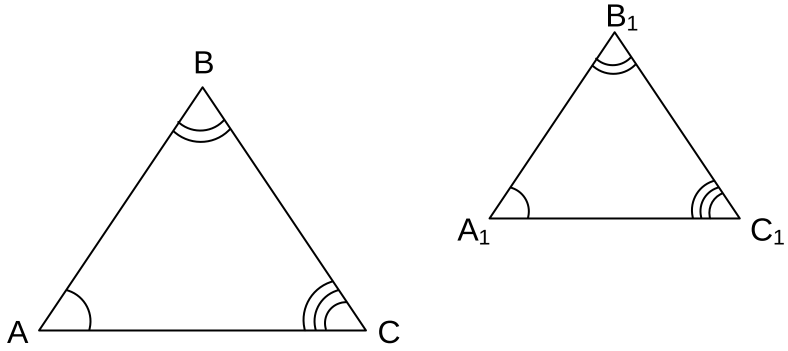
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1. DEFINICIÓN

Dos triángulos se llaman semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente congruentes y los lados homólogos proporcionales.

Los lados homólogos son los opuestos a ángulos congruentes y la razón de semejanza es la relación entre dos lados homólogos.

Dos triángulos semejantes ABC y A_1 B_1 C_1 satisfacen condiciones siguientes:

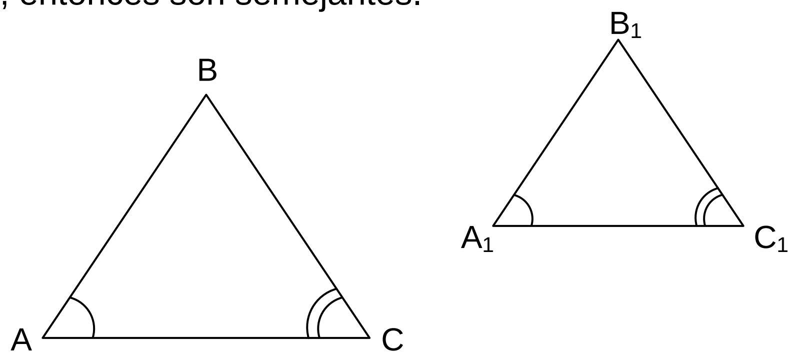


$$\angle A \cong \angle A_1, \quad \angle B \cong \angle B_1, \quad \angle C \cong \angle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$

y los designaremos $\Delta ABC - \Delta A_1B_1C_1$ y en esta forma están incluidas las cinco condiciones expresadas.

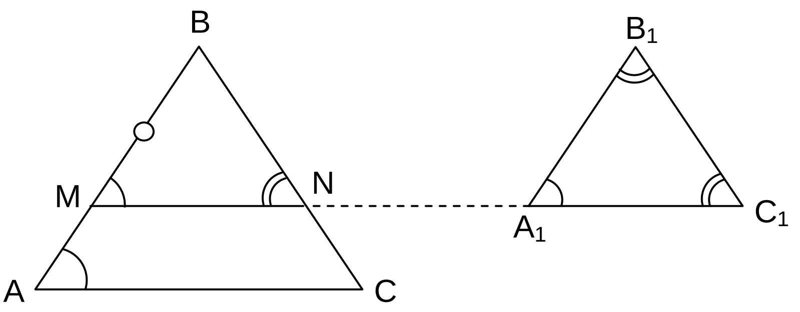
Teorema 1 (AA)
Primer criterio.- Si dos triángulos tienen dos ángulos ordenadamente congruentes, entonces son semejantes.



$$\angle A \cong \angle A_1, \quad \angle C \cong \angle C_1$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Demostración:
Se traza $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$ de manera tal que BM = A_1B_1.



En el ΔMBN y $\Delta A_1B_1C_1$

$\angle BMN \cong \angle BAC$ y $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$

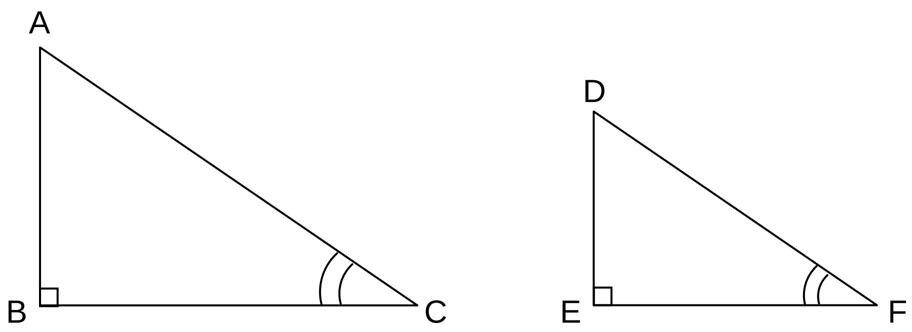
$\Rightarrow \quad \angle BMN \cong \angle B_1A_1C_1$

$\Rightarrow \quad \Delta MNB \cong \Delta B_1A_1C_1$ (Postulado de ALA)

$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (Por ser $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$)

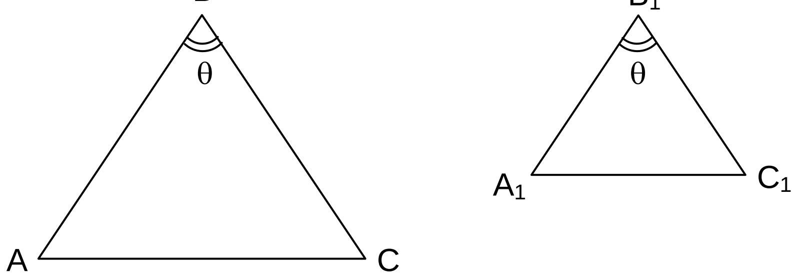
$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Corolario
Dos ángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente $\angle ACB \cong \angle DFE$



$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$

Teorema 2 (LAL)
Segundo criterio.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y congruentes el ángulo comprendido entre ellas.

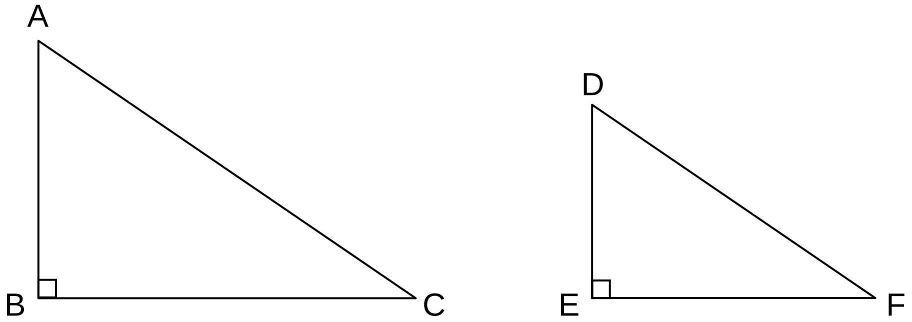


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\angle B \cong \angle B_1$$

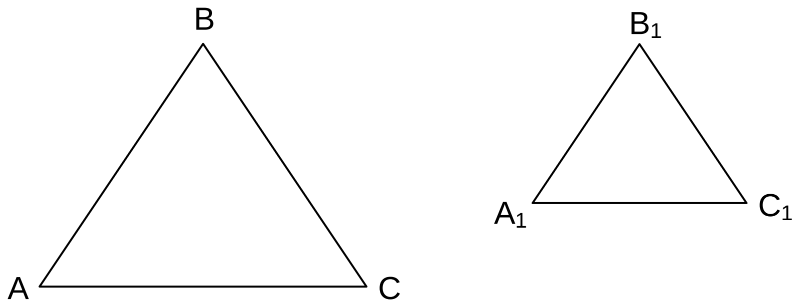
$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Corolario.- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen proporcionales sus catetos respectivamente.



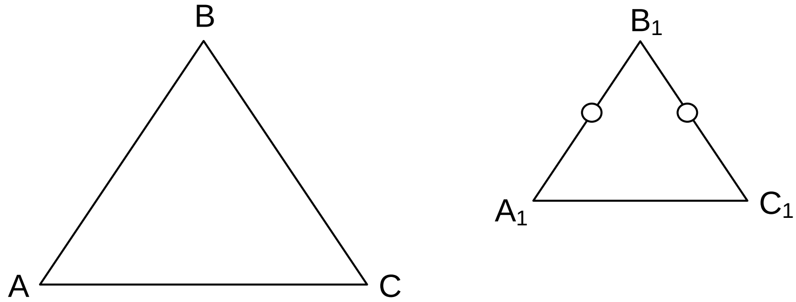
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Teorema 3 (LLL)
Tercer criterio.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Teorema 4
Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen proporcionales las bases y otro lado.



$\Delta ABC \wedge \Delta A_1B_1C_1$ son isósceles

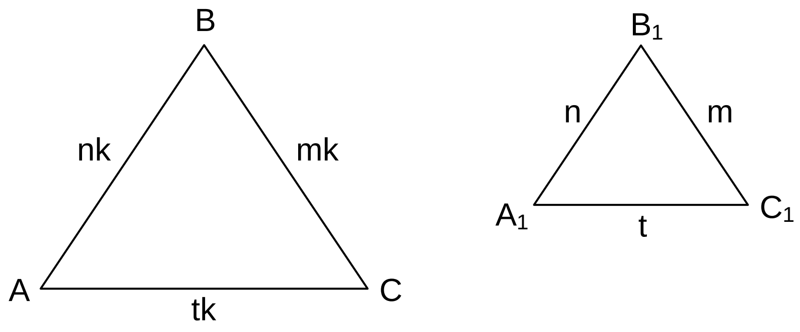
$$\left(\overline{AB} \cong \overline{BC},\ \overline{A_1B_1} \cong \overline{B_1C_1}\right)$$

$$\text{Si } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Teorema 5

Todos los triángulos cuyos lados sean ordenadamente proporcionales a tres números dados son semejantes entre sí.



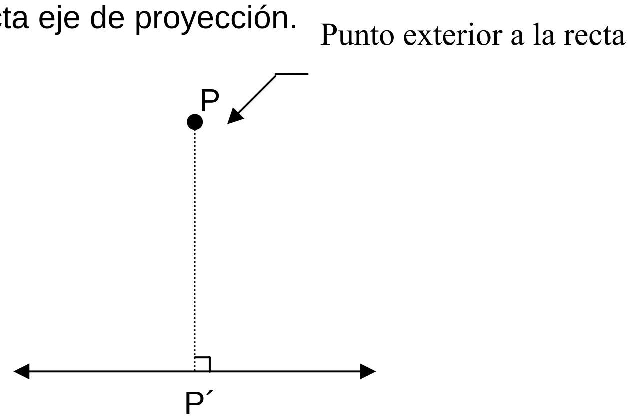
$$k \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

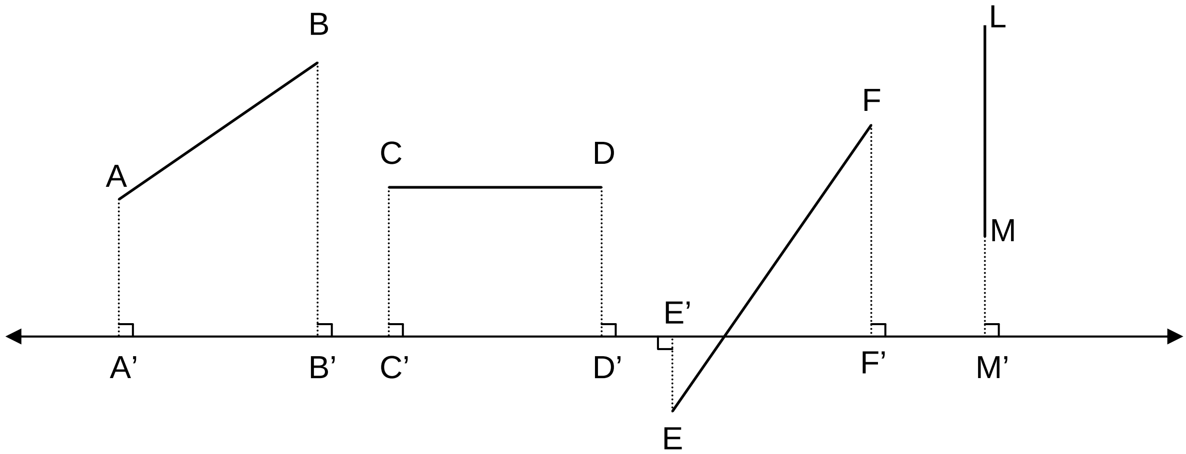
Relaciones Metricas en los Triángulos

PROYECCIÓN ORTOGONAL

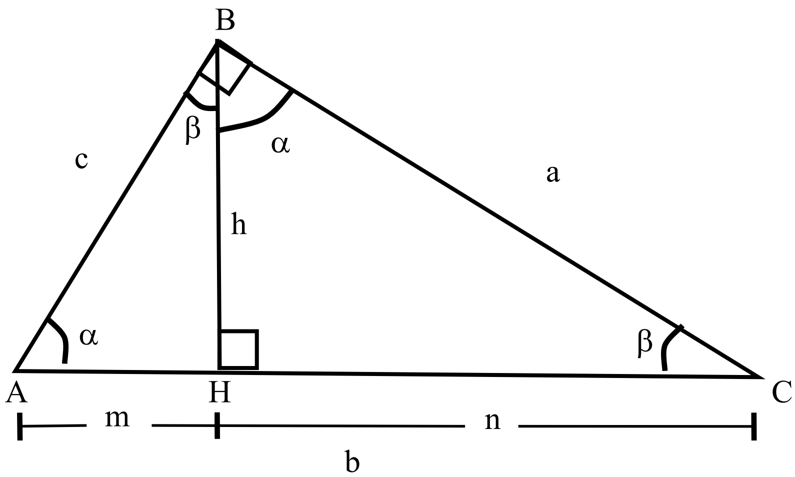
La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular (P') trazada por dicho punto a la recta. Esta perpendicular se denomina proyectante y la recta eje de proyección.



La proyección ortogonal de un segmento AB sobre una recta o eje de proyección es la parte del eje de proyección comprendida entre las proyecciones de los extremos de dicho segmento.
Si el segmento es perpendicular a la recta, su proyección es un punto.



Relaciones Metricas en el Triángulo Rectángulo



Teorema 1
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.
(La longitud de cada cateto es media proporcional entre la longitud de la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella).

Demostrar: $\boxed{c^2 = bm}$

Δ AHB ~ Δ ABC $\quad \dfrac{m}{c} = \dfrac{c}{b}$ entonces $\boxed{c^2 = bm}$

Δ BHC ~ Δ ABC $\quad \dfrac{n}{a} = \dfrac{a}{b}$ entonces $\boxed{a^2 = bn}$

Además $\quad \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{m}{n}$

Teorema 2
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.
(La longitud de la altura es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa).

Demostrar: $\boxed{h^2 = mn}$

Δ ABH ~ Δ BHC $\quad \dfrac{h}{m} = \dfrac{n}{h}$ entonces $\boxed{h^2 = mn}$

Teorema 3
En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa la altura relativa a dicha hipotenusa.

Demostrar: $\boxed{ac = bh}$

Por Teorema 1:

Δ AHB ~ Δ ABC $\quad \dfrac{h}{a} = \dfrac{c}{b}$ entonces $\boxed{ac = bh}$

Corolario (Teorema de Pitágoras)
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

Demostrar: $\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$

Por Teorema 1: $\quad c^2 = bm$, $\quad a^2 = bn$ $\quad$ entonces $\quad a^2 + c^2 = bn + bm$

$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$$

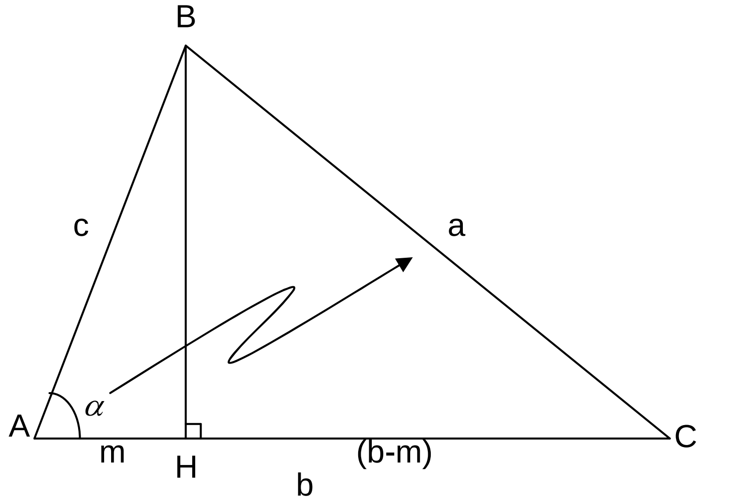
Corolario
En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

Por Teorema 2 y 4: $a^2 + c^2 = b^2$, $a^2c^2 = b^2h^2$ entonces $\boxed{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}}$

Relaciones Métricas en los Triángulos Oblicuángulos

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES

Primer Caso (Lado Opuesto a un ángulo agudo)
En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado que es opone a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección del otro sobre aquel.



Demostrar: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$

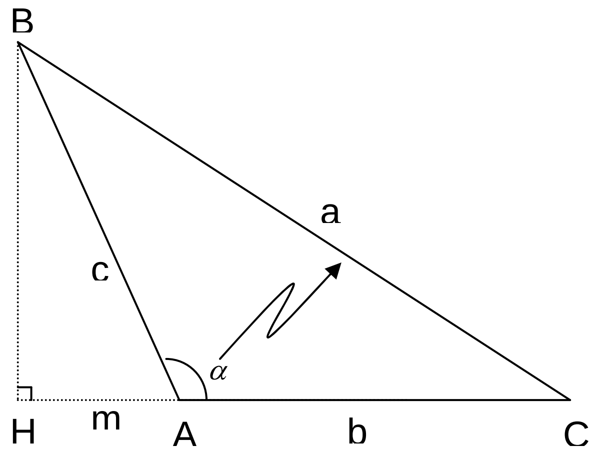
Δ AHB: $h^2 = c^2 - m^2$ .... (1)

Δ BHC: $h^2 = a^2 - (b - m)^2$ ...... (2)

(1) = (2): $c^2 - m^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2$

Luego: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$

Segundo Caso (Lado opuesto a un ángulo obtuso)
En todo triángulo el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados del las longitudes del los otros dos lados más el doble producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección del otro sobre aquel.



Demostrar: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$

Δ AHB: $h^2 = c^2 – m^2$ .... (1)

Δ BHC: $h^2 = a^2 – (b + m)^2$ ...... (2)

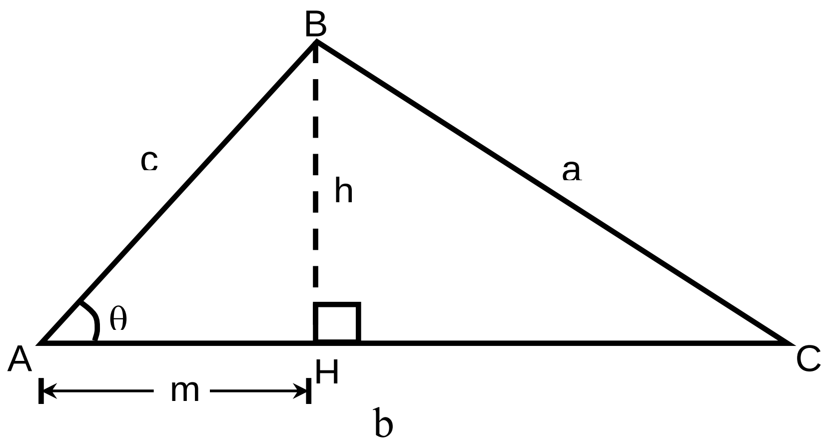
(1) = (2): $c^2 – m^2 = a^2 – b^2 – 2bm – m^2$

Luego: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$

Ley de Cosenos

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de dichos lados por el coseno de la medida del ángulo determinado por ellos.

Se sabe: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$



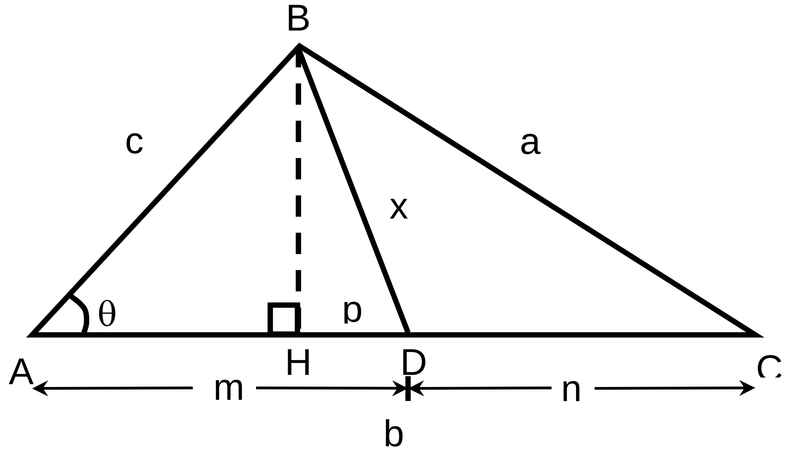
Se sabe: $a^2 = b^2 + c^2 – 2bm$

$$Si: \cos\theta = \frac{m}{c} \rightarrow m = c \cos\theta$$

Entonces: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\theta}$

Teorema de Stewart (Teorema de la Ceviana)

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos opuestos a dichos lados determinados por la ceviana en el lado al cual es relativa es igual al producto del cuadrado de la longitud de dicha ceviana con la longitud del lado al cual es relativa más el producto de las longitudes dicho lado con los segmentos determinados por la ceviana en este.



Demostrar $\boxed{c^2n + a^2m = x^2b + bmn}$

Δ Acutángulo: Δ ABD: $c^2 = x^2 + m^2 - 2pm$ ...(1)

Δ Obtusángulo: Δ BDC: $a^2 = x^2 + n^2 + 2pn$ ....(2)

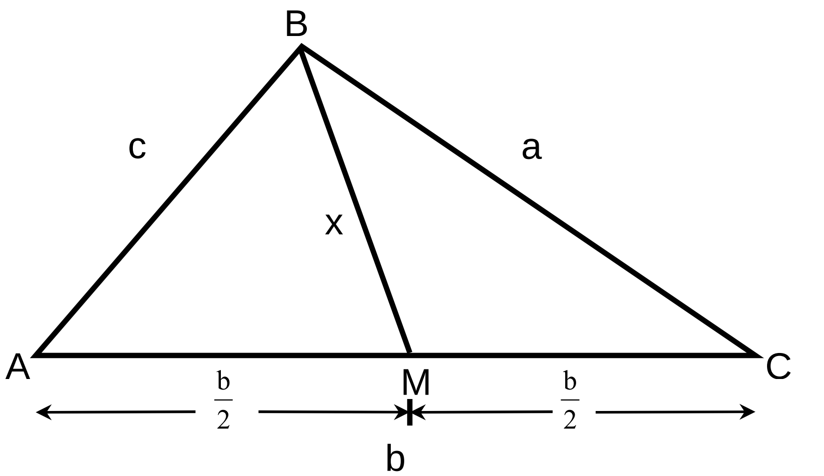
(1) x n: $c^2n = x^2n + m^2n - 2pmn$

(2) x m: $a^2m = x^2m + n^2m + 2pmn$

Sumando las dos ecuaciones: $a^2m + c^2n = x^2(m+n) + mn(m+n)$

Luego : $\boxed{c^2n + a^2m = x^2b + bmn}$

Teorema de la Mediana
En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.



Demostrar: $\boxed{c^2 + a^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}}$

Se sabe por teorema de Stewart.

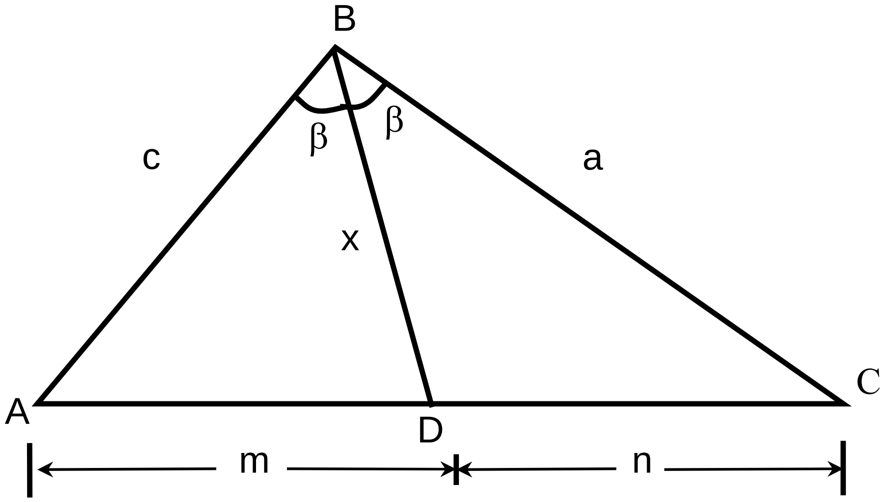
$$a^2\left(\frac{b}{2}\right) + c^2\left(\frac{b}{2}\right) = x^2 b + b\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)(a^2 + c^2) = \left(\frac{b}{2}\right)(2x^2 + \frac{b^2}{2})$$

Luego: $\boxed{c^2 + a^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}}$

Teorema de la longitud de la Bisectriz Interior

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los lados adyacentes y los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo.



Demostrar: $\boxed{x^2 = ac - mn}$

Se sabe por teorema de Stewart:

$a^2m + c^2n = x^2b + bmn$

$a(am) + c(cn) = x^2b + bmn$ …(1)

Prop. Bisect. Interiores $cn = am$ ………. (2)

(2) en (1) $a(cn) + c(am) = b(x^2 + mn)$

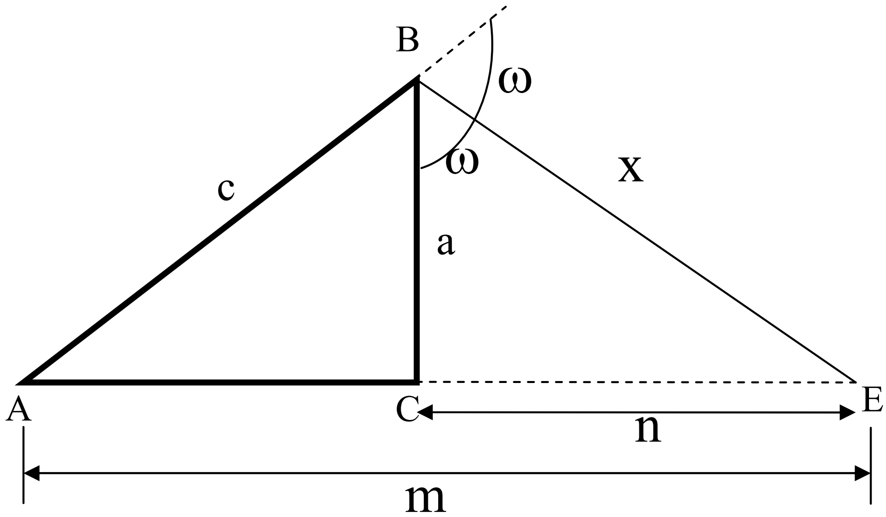
$$a\,(m + n) = b\,(x^2 + mn)$$

$$ac\,(b) = b\,(x^2 + mn)$$

Luego: $\boxed{x^2 = ac - mn}$

Teorema de la longitud de la Bisectriz Exterior

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de una bisectriz exterior (cuyos lados adyacentes a la bisectriz sean diferentes en longitud) es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado al cual es relativa y los lados adyacentes a dicha bisectriz.



Demostrar $\boxed{x^2 = mn - ac}$

Se sabe por teorema de Stewart

$$c^2n + x^2\,(m\text{-}n) = a^2m + mn\,(m\text{-}n) \;...\; (1)$$

Prop. Bisec. exteriores. $cn = am$ ……………..... (2)

(2) en (1) $(x^2 - mn)(m - n) = a^2m - c^2n$

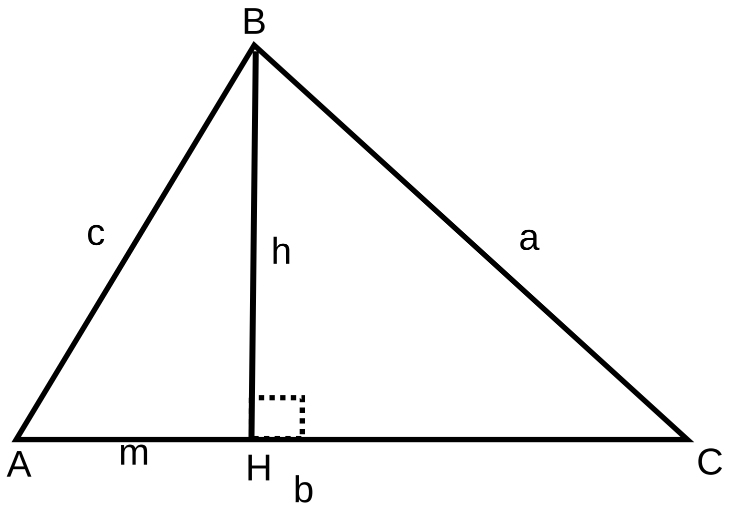
$$(x^2 - mn)(m - n) = a(cn) - c(am)$$

$$(x^2 - mn)(m - n) = -ac\,(m - n)$$

Luego: $\boxed{x^2 = mn - ac}$

Teorema de Herón

En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativa multiplicado con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro de la región limitada por dicho triángulo con la diferencia de dicho semiperímetro y la longitud de cada uno de sus lados.



Demostrar: $\boxed{h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Donde:

P = semiperímetro de la región triangular ABC $\quad p = \frac{a+b+c}{2}$

Δ AHB: $h^2 = c^2 - m^2$ .... (1)

Teorema de la proyección en el Δ ABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2mb$

$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} ....(2)$$

Reemplazando (2) en (1) $h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2$

$4b^2 h^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$4b^2 h^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$

$4b^2 h^2 = [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]$

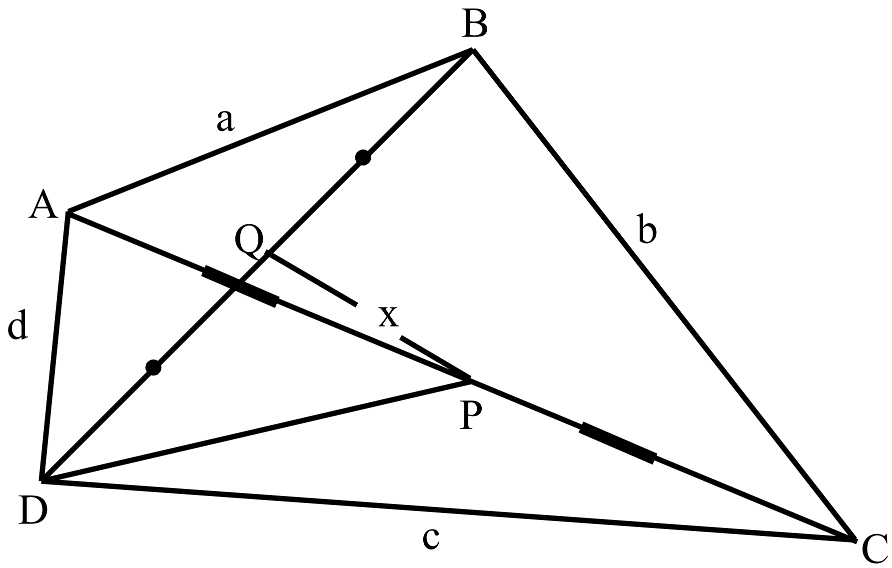
$4b^2 h^2 = (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

$4b^2 h^2 = (2p)(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b)$

Luego: $\boxed{h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Teorema de Euler

En todo cuadrilátero se cumple que la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más el cuádruplo del cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



Demostrar: $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = BD^2 + AC^2 + 4x^2}$

Aplicando el teorema de la mediana en:

$$\Delta ABC: \quad a^2 + b^2 = 2BP^2 + \frac{AC^2}{2} \text{....}(1)$$

$$\Delta ADC: \quad c^2 + d^2 = 2DP^2 + \frac{AC^2}{2} \text{....}(2)$$

$$\Delta BPD: \quad BP^2 + DP^2 = 2x^2 + \frac{BD^2}{2} \text{....}(3)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(BP^2 + DP^2) + AC^2$$

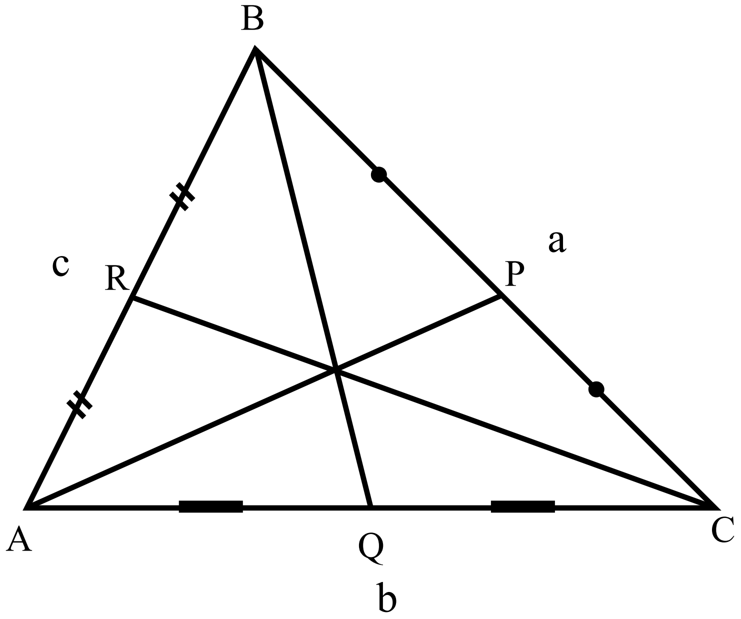
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\left(2x^2 + \frac{BD^2}{2}\right) + AC^2$$

Luego: $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = BD^2 + AC^2 + 4x^2}$

Ejercicios para clase:

Teorema de Booth

En todo triángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las tres medianas es igual a tres cuartos de la suma de los cuadrados de los tres lados.

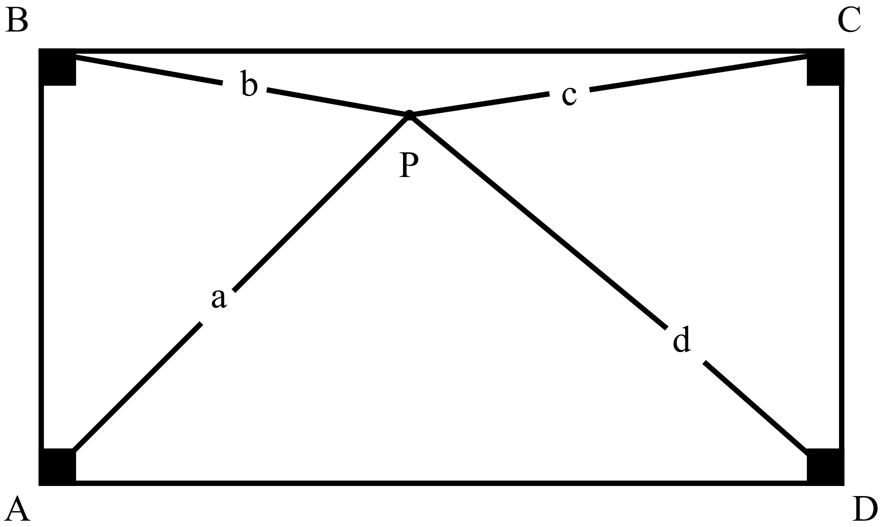


$$\boxed{AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Teorema

En todo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera, hacia dos vértices opuestos, son iguales.

Si “P” es un punto cualquiera que puede encontrarse en el interior, exterior o en el mismo rectángulo, entonces:

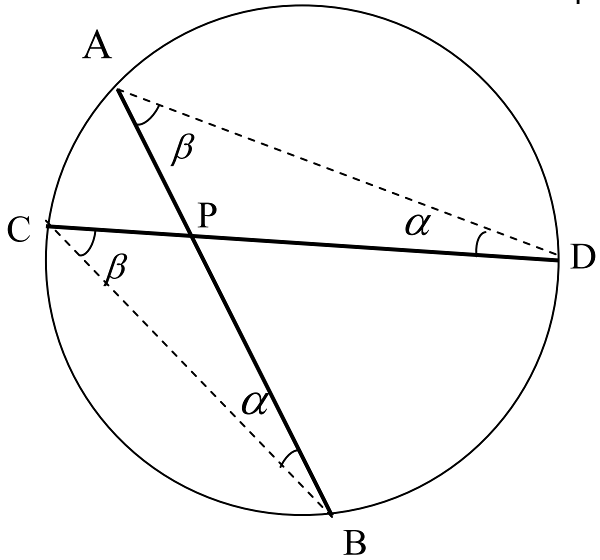


$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Teorema de las Cuerdas

Si por un punto del interior de una circunferencia pasa una cuerda, entonces el producto de las longitudes de los dos segmentos determinados es una constante.
Si P es un punto del interior de la circunferencia se cumplirá:

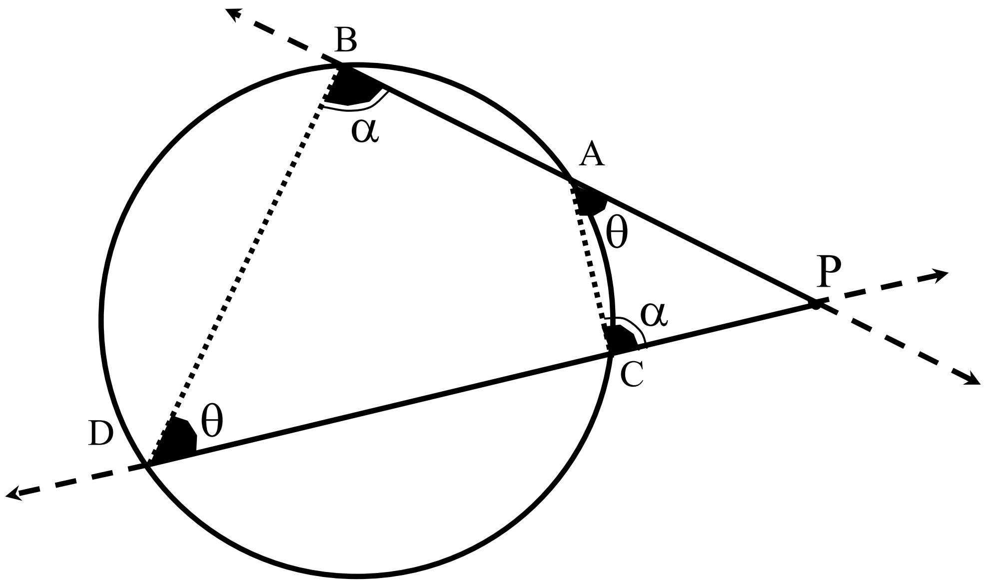


Δ APD ~ Δ CPB: $\boxed{PA \times PB = PC \times PD}$

Teorema de las Secantes

Si por un punto exterior de una circunferencia pasa una secante, entonces el producto entre las longitudes del segmento secante y su parte externa a la circunferencia es constante.

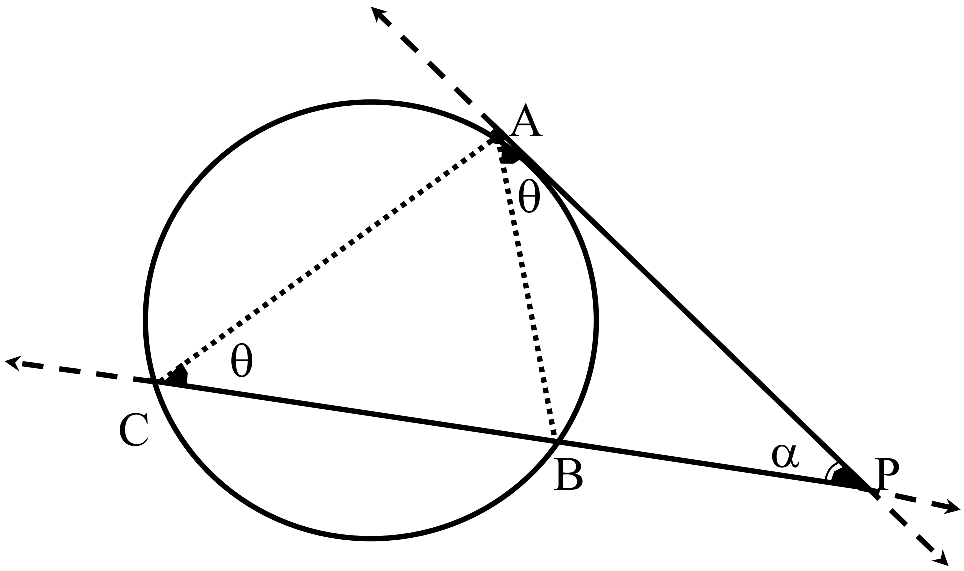
Si P es un punto del exterior de la circunferencia se cumplirá:



Δ PAC ~ Δ PBD $\boxed{PA \times PB = PC \times PD}$

Teorema de la Tangente
Si desde un punto del exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante, entonces el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto entre las longitudes del segmento secante y su parte externa a la circunferencia.

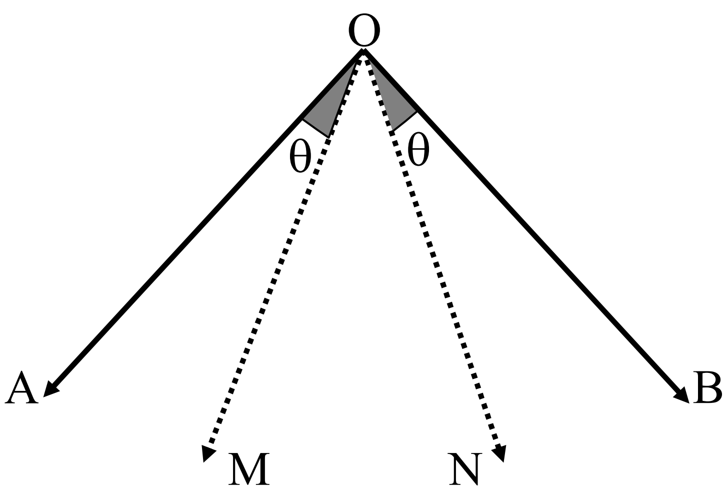
Si P es un punto del exterior de la circunferencia se cumplirá



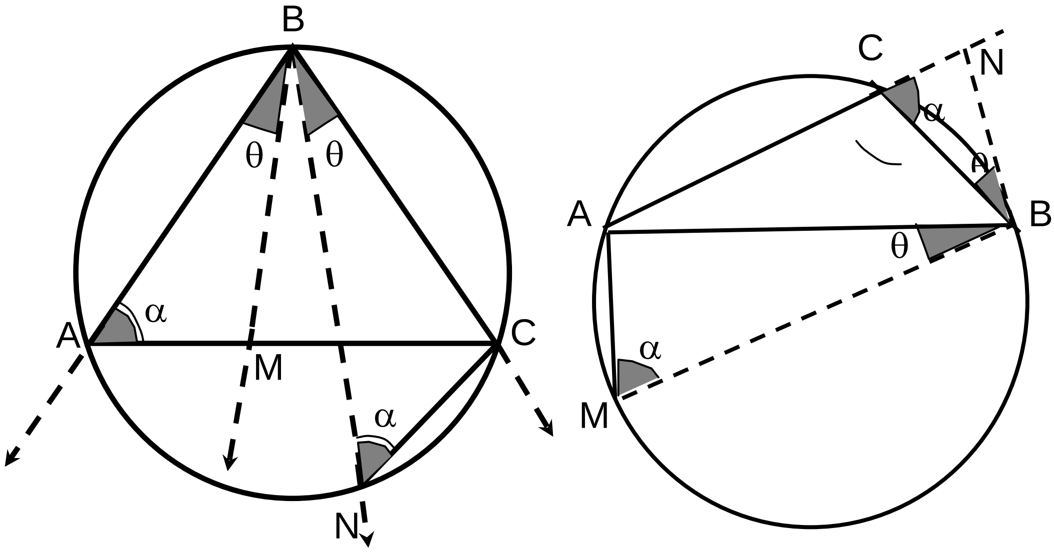
Δ APB ~ Δ APC $\boxed{PA^2 = PBxPC}$

RAYOS ISOGONALES

Dos rayos son isógonales con respecto a los lados de un ángulo con origen en el vértice del ángulo, cuando estando ambos en el interior o en el exterior, forman ángulos congruentes con los lados del ángulo.

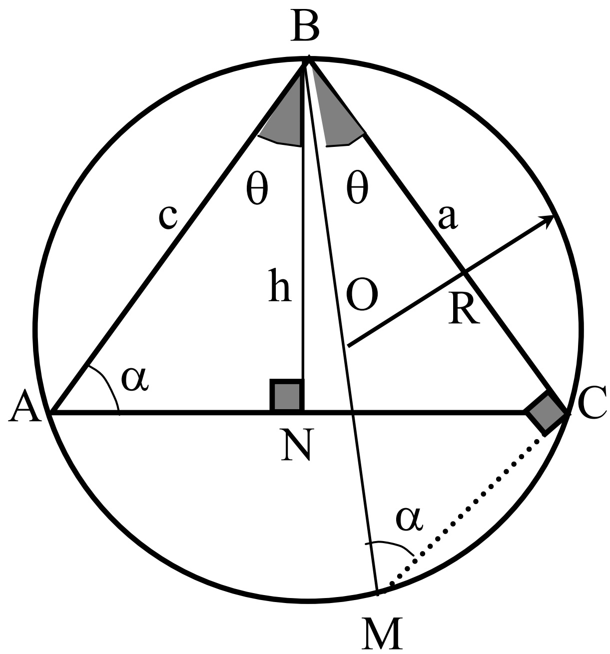


Teorema de las Isogonales
En todo triángulo se cumple que el producto de dos lados es igual al producto de sus isogonales, donde una de ellas está limitada por el tercer lado y la otra por la circunferencia circunscrita al triángulo.



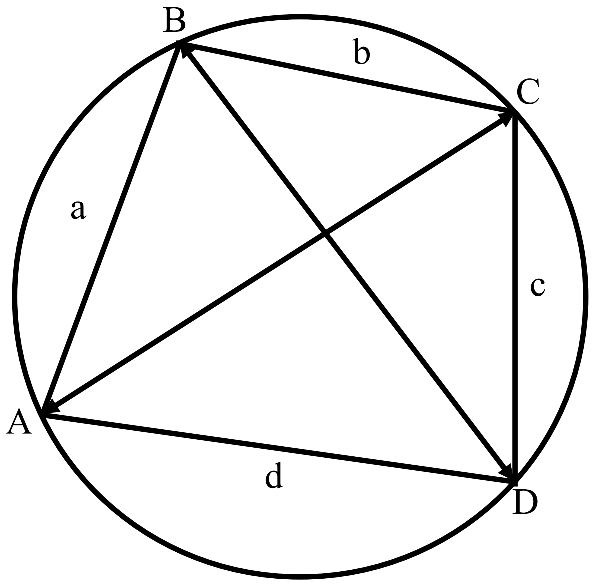
Δ AMB ~ Δ BCN: $\boxed{BA \times BC = BM \times BN}$

COROLARIO:
En todo triángulo se cumple que el producto de dos lados es igual al producto entre la altura relativa al tercer lado y el diámetro de la circunferencia circunscrita.
Se verifica que la altura BN y el diámetro BM son conjugadas isogonales; luego:

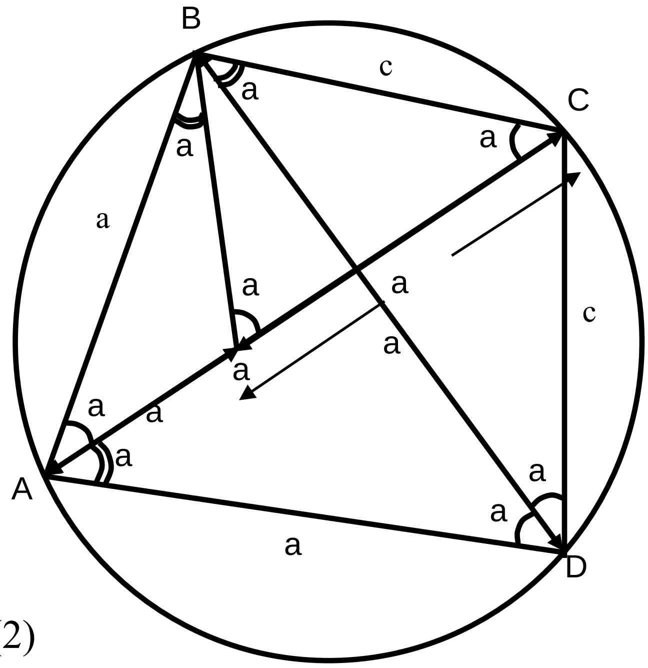


Δ ANB ~ Δ MCB: $\boxed{a \times c = 2Rh}$

Teorema de Ptolomeo:
En todo cuadrilátero inscrito a una circunferencia, el producto de las diagonales de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



Demostrar: $\boxed{ACxBD \;=\; ac \;+\; bd}$



Sea: AC = y , BD = x

Trazamos BE, tal que:

m∠ ABE = m∠ DBC = θ

Si: AE = t ⇒ EC = y – t

Δ ABE ~ Δ BCD:

$$\frac{t}{c} = \frac{a}{x} \Rightarrow ac = xt \quad ......(1)$$

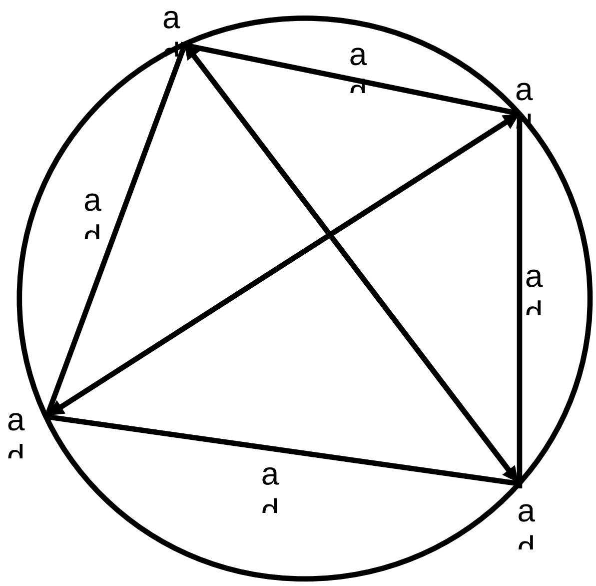
Δ EBC ~ Δ ABD:

$$\frac{b}{x} = \frac{y-t}{d} \Rightarrow \quad bd = x(y-t)\,....(2)$$

$$(1)+(2): \quad ac + bd = xt + x(y\text{-}t)$$

Luego: $\boxed{ACxBD \;=\; ac \;+\; bd}$

Teorema de Viette:
En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la razón de sus diagonales es igual a la razón de las sumas de los productos de los lados que concurren en los extremos de cada diagonal.



Demostrar: $\boxed{\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd}}$

(1) Trazar la cuerda $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

La medida de los arcos

$m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{AD}$

y $m\overset{\frown}{EA} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{EC}$

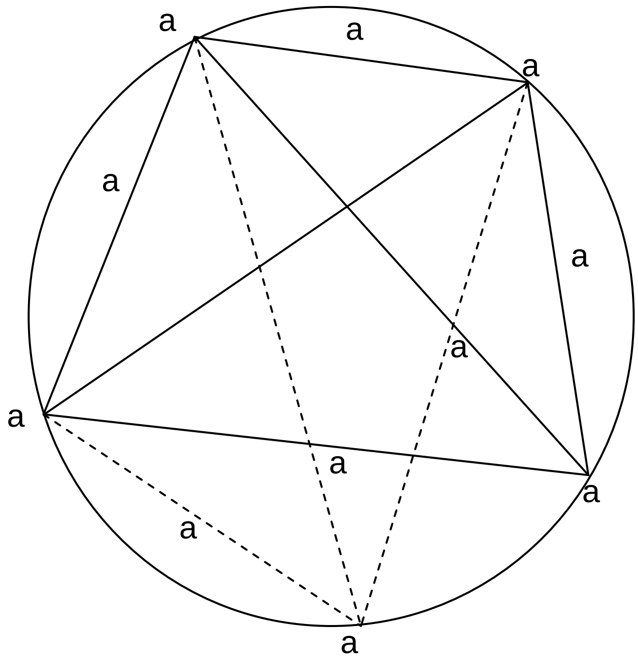
Si: $m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{EC}$

Entonces las cuerdas: $AD = EC = d$

En el cuadrilátero ABCE

Por el teorema de Ptolomeo:

$ad + bc = (AC)(BE)$

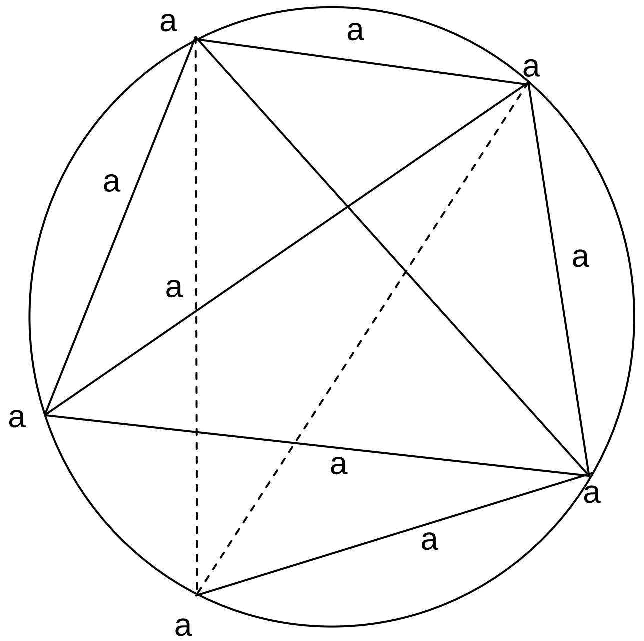


(2) Trazar la cuerda $\overline{DF} \cong \overline{AB}$

La medida de los arcos

$m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{AD}$

y $m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} + m\overset{\frown}{DF} = m\overset{\frown}{BF}$



Si: $m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{BF}$

Entonces las cuerdas: $AD = BF = d$

En el cuadrilátero BCDF

Por el teorema de Ptolomeo:

$ab + cd = (BD)(CF)$

Luego: $ad + bc = (AC)(BE)$ …….(1)

$ab + cd = (BD)(CF)$ ……..(2)

Dividiendo (1) con (2) $\dfrac{ad + bc}{ab + cd} = \dfrac{(AC)(BE)}{(BD)(CF)}$

Si: $m\overset{\frown}{BE} = m\overset{\frown}{CF}$, entonces BE=CF

Luego: $\boxed{\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd}}$

BIBLIOGRAFÍA

Edwin E. Moise
Elementary Geometry

Michel Helfgott
Geometría Plana

William Benton
Enciclopedía Británica The thiteen books of Euclid´s elementns

Reunión de Profesores
Cours de Geometrie

Flavio Vega Villanueva
Geometría 4° secundaría

Howard Eves
Geometría