GEOMETRÍA

La geometría es la rama de las Matemáticas que tiene por objeto el estudio de las figuras geométricas. Se denomina figura geométrica a cualquier conjunto no vacío de puntos del espacio. Se considera al espacio como el conjunto de todos los puntos.

En el frontis de LA ACADEMIA (Institución formada por Platón para el cultivo de las Ciencias), aparecía una inscripción, la cual decía: "Qué nadie ignorante en Geometría pase por esta puerta".

** Platón (427 – 347 A.C.), notable filósofo griego.*

Para el estudio de la geometría es necesario tener una idea clara del significado de los términos: concepto y proposiciones.

Los conceptos son de dos tipos: **primitivos** y **definidos**. Los conceptos primitivos son los primeros que se dan en la teoría. Precisamente por este hecho es que no se los puede definir, ya que la definición de un concepto se basa en otros dados anteriormente. Son los conceptos primitivos, el *punto, la recta y el plano*.

Las proposiciones son de dos tipos: **Postulados** o **Axiomas** (esta dos palabras son sinónimas) y **Teoremas**. Los postulados o axiomas son las proposiciones que se aceptan sin demostración. Los teoremas son las proposiciones que necesitan ser demostradas. Algunos autores afirman que un postulado es una proposición cuya verdad es evidente. Esta apreciación es incorrecta. La verdad de un postulado no es una verdad absoluta, sino una **verdad convencional**. En otras palabras, la verdad del postulado depende de nosotros y no del postulado mismo. El descubrimiento de este hecho ha costado siglos de meditación. El matemático alemán Bernhard Riemann fue uno de los primeros en descubrirlo. Riemann, a mediados del siglo XIX, cambió el postulado de Euclides (el postulado de las paralelas) por este otro que no tiene nada de evidente: "Dos rectas siempre se intersectan". Es decir, no existen rectas paralelas. El resultado fue que Riemann creó una nueva Geometría tan útil y "buena" como la Geometría de Euclides. El matemático ruso Lobachevsky (1793 – 1856) hizo algo similar, creando una tercera geometría. La Geometría de Riemann y la de Lobachevsky son conocidas con el nombre de Geometrías no Euclidianas.

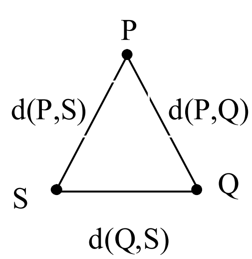
Cuando una teoría ha sido desarrollada sistemáticamente partiendo de conceptos primitivos y axiomas, se dice que esta teoría ha sido construida usando el **Método Axiomático**. El primero en introducir este método fue Euclides en su trascendental obra de geometría que lleva el nombre de "**Los Elementos**". Sin embargo, Euclides no se dio cuenta de la existencia de conceptos primitivos. David Hilbert (1 862 – 1 943) fue el primero en reconstruir la Geometría de Euclides exitosamente en forma axiomática, lo hizo usando 6 conceptos primitivos y 21 postulados.

POSTULADOS

Tenemos un conjunto no vacío $\mathcal{E}$ a cuyos elementos les llamaremos puntos. En $\mathcal{E}$ se distinguen dos familias de subconjuntos no vacíos, la familia de las rectas y la familia de los planos. No definimos lo que es un punto, una recta o un plano. Estos son nuestros conceptos primitivos. A $\mathcal{E}$, que es el conjunto formado por todos los puntos, lo llamamos espacio. Este es nuestro conjunto universal.

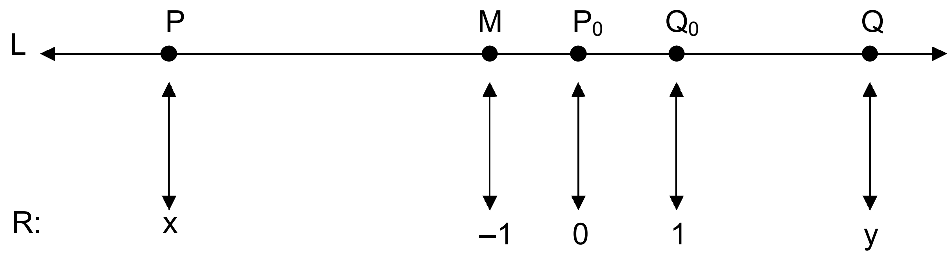
Postulado de la distancia: Si P y Q son dos puntos, entonces existe un número real denominado distancia entre P y Q y que se denota d (P, Q) tal que:

a) $d(P,\ Q) \geq 0,\ \forall P,\ Q \in \mathbf{E}$
b) $d(P,Q) = 0 \leftrightarrow$ P es Q
c) $d(P,\ Q) = d(Q,\ P),\ \forall P,Q \in \mathbf{E}$
d) (Desigualdad triangular)
$d(P,\ S) \leq d(P,\ Q) + d(Q,\ S)\ \forall\ P,\ Q,\ S \in \mathbf{E}$



Postulado de la regla (Cantor – Dedekind): Si $\mathcal{L}$ es una recta y si P_0 y Q_0 son dos puntos diferentes de $\mathcal{L}$, entonces existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathcal{L}$ y los números reales tal que:

a) Al punto P_0 le corresponde el número real 0 y a Q_0, el número real 1.
b) Si al punto P le corresponde el número real x y a Q el número real y, entonces: d (P, Q) = $|\ x - y\ |$



Toda recta tiene infinitos puntos.

Definición: Un sistema de coordenadas unidimensional es una correspondencia, como la descrita en el postulado 2. El punto P_0 es el origen del sistema de coordenadas. La coordenada de un punto es el número real que le corresponde.

Definición: Sean P, Q y S tres puntos diferentes de $\mathcal{L}$. El punto Q está entre P y S cuando d (P, S) = d (P, Q) + d (Q, S).
Esto se denota: P – Q – S

Definición: El segmento cerrado de la recta $\mathcal{L}$ de extremos P y Q es el conjunto:
$\overset{\circ\!-\!\circ}{PQ} = \overset{\circ\!-\!\circ}{PQ} \cup \{P, Q\}$
La longitud de $\overset{\circ\!-\!\circ}{PQ}$ y de $\overset{\bullet\!-\!\bullet}{PQ}$ es el número PQ = d (P, Q).

Si omitimos los extremos se denomina segmento abierto.
Si una recta $\mathcal{L}$ es perpendicular en el punto medio a un segmento, entonces $\mathcal{L}$ es la mediatriz de dicho segmento.

Definición: Dos segmentos cualesquiera, $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ son congruentes $(\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}) \longleftrightarrow PQ = P'Q'$.

Teorema 1: Si P y Q son dos puntos diferentes de la recta $\mathcal{L}$, entonces existe un punto C de la recta, tal que C está entre P y Q.

Demostración: Sean x e y las coordenadas de P y Q respectivamente. Supongamos que $x < y$. El número $\frac{x+y}{2}$ es tal que:

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

Si C es el punto cuya coordenada es $\frac{x+y}{2}$, tenemos que C está entre P y Q.

Corolario: Entre dos puntos diferentes de una recta, existen infinitos puntos de la recta.

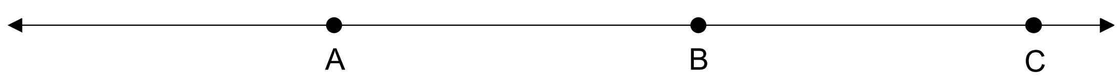
Postulado: Dados P y Q, dos puntos diferentes cualesquiera de $\mathcal{E}$, existe una única recta $\mathcal{L}$, tal que P, Q en $\mathcal{L}$. En este caso denotaremos a $\mathcal{L}$ con $\overleftrightarrow{PQ}$ y diremos que $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por P y Q o que $\mathcal{L}$ es la recta determinada por P y Q.

Teorema 2: Si dos rectas diferentes se intersectan, entonces su intersección es un punto.

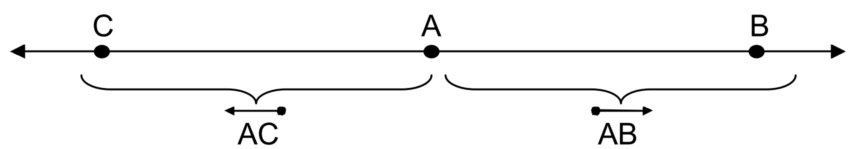
Definición: Sea A y B dos puntos de una recta $\mathcal{L}$ el rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto que resulta de la unión del segmento $\overline{AB}$ y de todos los puntos C tales que B está entre A y C.

. La definición de rayo AB se escribirá:
$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C / B \text{ está entre A y C}\}$

. Las dos partes del rayo se representan así:



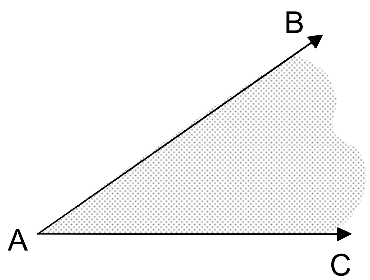
. Si un punto A está entre B y C se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos. La siguiente figura ilustra este concepto:



. Si a un rayo $\overrightarrow{AB}$ se le omite su origen, al conjunto de puntos restantes se le denomina semirecta AB y se denota $\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$.

ÁNGULOS

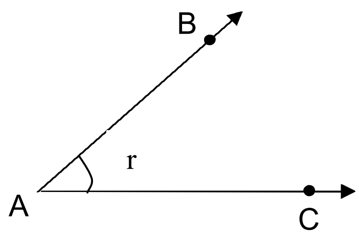
Definición: Se denomina ángulo a la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen. Si los rayos son: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ entonces el ángulo BAC se denota $\angle BAC = \{\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}\}$



A es el vértice del ángulo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados del ángulo. La parte sombreada es el interior del ángulo y los puntos del plano que no pertenecen ni al ángulo ni a su interior constituyen el exterior del ángulo.

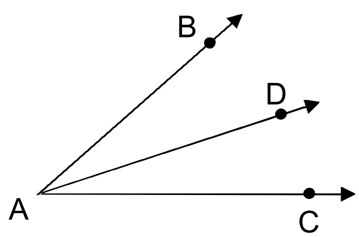
Bisectriz: Es el rayo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

Postulado de la medida de un ángulo.
A cada ángulo BAC le corresponde un único número real r comprendido entre 0 y 180, denominado la medida del ángulo, tal que m< BAC = r

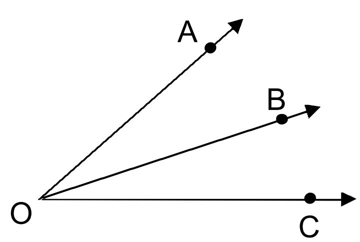


Postulado de la adición de ángulos.

Si un punto D pertenece al interior de un ángulo BAC entonces; $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$

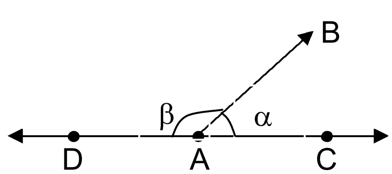


Definición: Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el vértice y un lado común, los interiores de los ángulos son conjuntos disjuntos.



$\angle$AOB y $\angle$BOC son ángulos adyacentes

Definición: Dos ángulos forman un par lineal cuando son adyacentes y los lados no comunes son rayos opuestos.

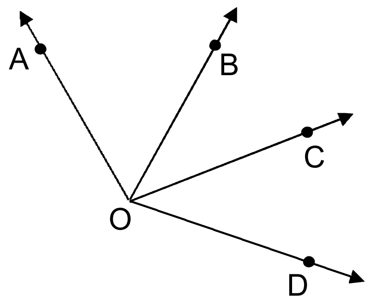


Los ángulos BAC y BAD forman un par lineal.

Postulado del suplemento

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

En la Figura:



$\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ son ángulos consecutivos.

CONJUNTOS CONVEXOS

Definición: Un conjunto $\mathcal{A}$ de puntos se denomina conjunto convexo, cuando todo segmento determinado por dos puntos cualesquiera de $\mathcal{A}$, está contenido en $\mathcal{A}$.

* $\mathcal{A}$ es conjunto convexo $\Leftrightarrow$ $\forall P,\ Q \in A,\ \overline{PQ} \subset A$

En las figuras (1) y (2) se muestran conjuntos convexos, en cambio en la figura (3) se ha representado un conjunto no convexo.

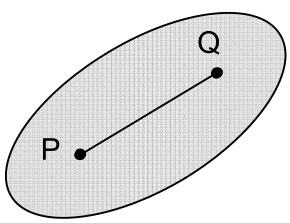


Fig. 1

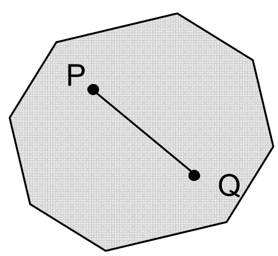


Fig. 2

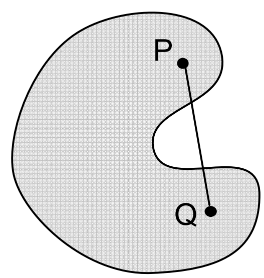


Fig. 3

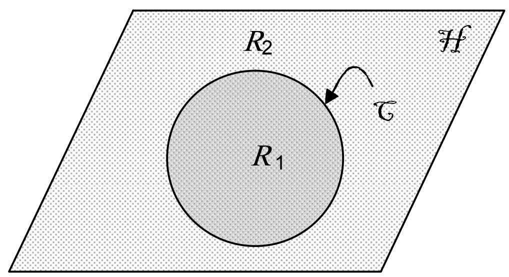
Ejemplos:
Conjuntos convexos: Una recta, un rayo, un segmento de recta, un círculo, el interior de un ángulo, una esfera, etc

Conjuntos no convexos: El exterior de un ángulo, un ángulo, una circunferencia, el exterior de un cuadrado, el exterior de una esfera, etc

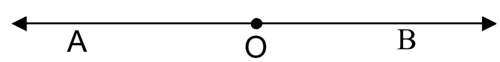
Partición de un Conjunto

Se denomina partición de un conjunto A a cualquier colección de subconjuntos de A , ninguno de los cuales es vacío y tales que cada elemento de A pertenece a sólo uno de estos subconjuntos de A .

. Si una circunferencia $\mathcal{C}$ está contenida en un plano $\mathcal{H}$, R_1 y R_2 son respectivamente el interior y el exterior de la circunferencia, una partición resultante del plano $\mathcal{H}$ es $\{R_1, \mathcal{C}, R_2,\}$.



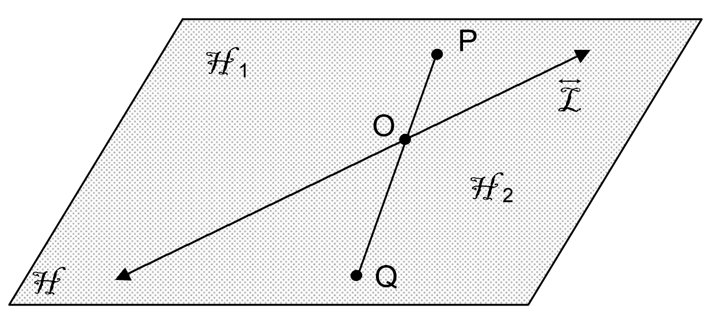
. Si O es un punto de una recta $\mathcal{L}$ y $\overset{\circ\longrightarrow}{OA}$ y $\overset{\circ\longrightarrow}{OB}$ son respectivamente las dos semirectas resultantes, entonces la correspondiente partición es $\{\overset{\circ\longrightarrow}{OA}, O, \overset{\circ\longrightarrow}{OB}\}$



Postulado de la separación de puntos de un plano

Si una recta $\mathcal{L}$ está contenida en un plano $\mathcal{H}$, entonces los puntos del plano que no pertenecen a la recta constituyen dos conjuntos disjuntos denominados semiplanos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Tales que:



a) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son conjuntos convexos.

b) Si $P \in \mathcal{H}_1$ y $Q \in \mathcal{H}_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap \mathcal{L} \neq \phi$

c) $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{L}$ forman una partición del plano $\mathcal{H}$: $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{L}, \mathcal{H}_2\}$

Se denomina a $\mathcal{L}$ como la <u>arista</u> de los dos semiplanos.

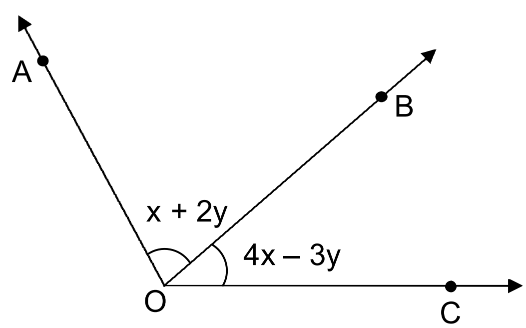
Postulado de la construcción de un ángulo.

Si $\overrightarrow{AB}$ es un rayo de la arista del semiplano $\mathcal{H}$ y r es un número real tal que $0 < r < 180$, entonces existe un único rayo $\overrightarrow{AC}$ con $C \in \mathcal{H}$ tal que $m\angle BAC = r$.

Teorema: Si dos conjuntos de puntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos convexos, entonces la intersección de estos conjuntos es un conjunto convexo.

Ejercicios:

1. En la figura, $m\angle AOC = 150$. Halle el mayor valor entero de x.



Solución:

$$m\angle AOB + m\angle BOC = 150$$
$$x + 2y + 4x - 3y = 150$$
$$5x - y = 150$$
$$y = 5x - 150$$

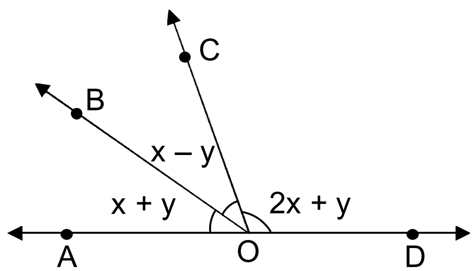
$$* \ 4x - 3y > 0$$
$$4x > 3y$$
$$4x > 3\,(5x - 150)$$
$$450 > 11x$$
$$\frac{450}{11} > x$$
$$40{,}9 > x \rightarrow x = 40$$

2. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   I. Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos, es un conjunto convexo.
   II. Si T es una región triangular y E es un circulo, tal que $T \cap E = \phi$, entonces $T \cap E$, es un conjunto convexo.
   III. Si la unión de dos conjuntos es un conjunto convexo, entonces los conjuntos son conjuntos convexos.

Solución:

I) V
II) V
III) F

3. En la figura, si x asume su mínimo valor entero. Halle y.



Solución:

* $x + y + x - y + 2x + y = 180$

$4x + y = 180 \Rightarrow y = 180 - 4x$

* $x - y > 0 \Rightarrow x > y$

$x > 180 - 4x$

$x > 36 \Rightarrow x = 37$

$\therefore\ y = 180 - 4(37) = 32$

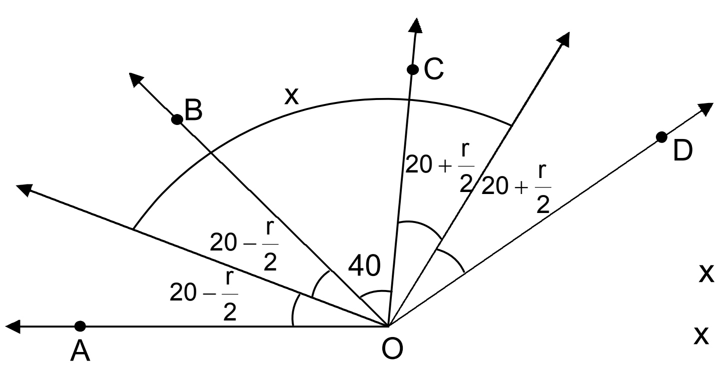
4. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   I. Una region triangular de la que se han omitido los puntos medios de sus lados, es un conjunto convexo.
   II. El rayo es un conjunto convexo.
   III. En un círculo en cuyo contorno se han omitido dos puntos diametralmente opuestos, es un conjunto convexo

   Solución:

   I) F
   II) V
   III) V

5. Las medidas de tres ángulos adyacentes AOB, BOC y COD forman una progresión aritmética. Si $m\angle BOC = 40$, entonces la medida del ángulo que determinan las bisectrices de los ángulos AOB y COD es

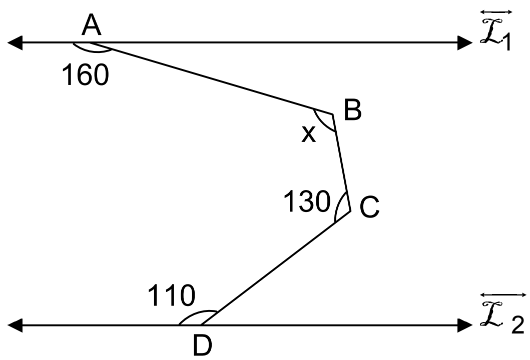
   Solución:



$$x = 20 - \frac{r}{2} + 40 + 20 + \frac{r}{2}$$

$x = 80$

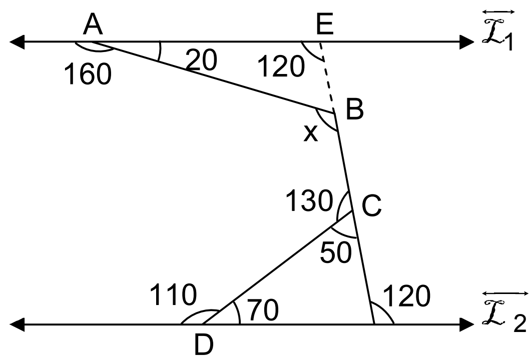
6. En la figura, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$. Halle x



Solución:

x = 120 + 20

x = 140



7. Las medidas de 2 ángulos estan en la relación de 1 a 3. Si la diferencia entre sus complementos es un octavo de la suma de sus suplementos. Halle el complemento del menor ángulo.

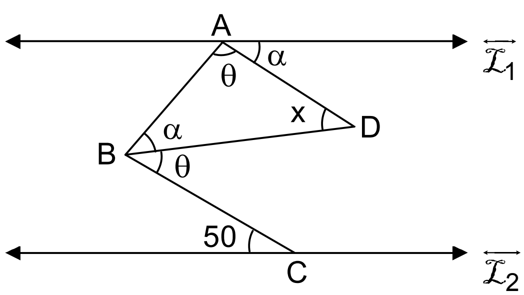
Solución: Sean α y β las medidas de los ángulos.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = k \\ \beta = 3k \end{array}$$

$$(90-\alpha)-(90-\beta) = \frac{1}{8}(180-\alpha+180-\beta) \;\Rightarrow\; \alpha = 18$$

Complemento de $\alpha = 90 - 18 = 72$

8. En la figura $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$. Halle x.



Solución:

$\alpha + \theta = x + 50$

180 – x = x + 50

130 = 2x

x = 65

BIBLIOGRAFÍA:

1. Edwin Moise, Floyd Downs, Geometría Moderna, Fondo Educativo Interamericano, Edición 1 970.

2. Michel Helfgott, Geometría Plana, Editorial Escuela Activa, 1 982

3. Profesores CEPRE-UNI
   Curso de Geometría Plana – Edición 2 002.

4. Seminario CEPRE-UNI