MATRICES

Definición: Matriz es un arreglo rectangular de elementos ordenados en filas y columnas
Notación: A, B, C, D…., Z.
Así:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1j}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2j}\cdots & a_{2n}\\ \hdashline a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{ij}\cdots & a_{in}\\ \hdashline a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mj}\cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

FILAS

COLUMNAS

Donde:
a_{11}, a_{12}, …a_{21}, a_{22}… a_{m1}, a_{m2}, … ,a_{mn} son elementos de la matriz, que pueden ser números reales (o complejos) y también pueden ser funciones.
a_{ij}: es el elemento de A que se encuentra en la fila i, y en la columna j.

Orden de la matriz.- Si una matriz tiene m filas y n columnas. la matriz A se denota $A = (a_{ij})_{mxn}$, su orden es mxn.

TIPOS DE MATRICES

1) **Matriz nula.**

$$A=(a_{ij})_{mxn} \,/\, a_{ij}=0 \quad \forall 1\le i\le m, 1\le j\le n$$

Ej. $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}_{2x2}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2x4}$

2) **Matriz fila:**
Es aquella matriz que tiene 1 sola fila y n columnas, $A = (a_{1j})_{1xn}$.
Ej. $A = (\pi \quad Ln2 \quad 0 \quad 5)_{1x4}$

3) **Matriz columna**
Es aquella matriz que tiene n filas y una sola columna, $A = (a_{i1})_{nx1}$.

Ej. $A=\begin{bmatrix}0\\-\pi\\2\\\sqrt{5}\end{bmatrix}_{4x1}$

4) **Matriz cuadrada**
Es aquella matriz donde el número de filas es igual al número de columnas.
Notacion: $A = (a_{ij})_{nxn}$ ó $A = (a_{ij})_n$
Así

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

diagonal principal : a_{11} a_{22} a_{33}

5) **Matriz diagonal**
$A = (a_{ij})_{nxn} /\ a_{ij} = 0\ \forall\ i \neq j$
Ej.

$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}_{2x2}$ $\quad B=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3x3}$

6) **Matriz escalar**

$$A=(a_{ij})_{nxn}/\ a_{ij}=\begin{cases}k; & i=j\\ 0; & i\neq j\end{cases}$$

Ej.

$$A=\begin{pmatrix}Ln2&0&0\\0&Ln2&0\\0&0&Ln2\end{pmatrix} \text{donde } k=Ln2$$

7) **Matriz identidad**
Es una matriz escalar donde k = 1.
Ej.

$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{2x2}$ $\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3x3}$

8) **Matriz triangular superior**
$A = (a_{ij})_{nxn} /\ a_{ij} = 0,\ \text{si } i > j$

Ej. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&7\\0&0&8\end{pmatrix}$

9) Matriz triangular inferior

$A = (a_{ij})_{nxn} / a_{ij} = 0$, si $i < j$

Ej. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 10 & 4 & \pi \end{pmatrix}$

10) Matrices Conmutables.

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, se dicen que conmutan si AB=BA.

11) Matriz Idempotente.

Si A es una matriz cuadrada y $A^2=A$, A se dice que es una matriz idempotente.

12) Matriz Involutiva.

Si A es una matriz cuadrada y $A^2=I$, A se dice que es una matriz involutiva.

13) Matriz Ortogonal.

Si $A^{-1}=A^T$, A se dice que es una matriz ortogonal.

14) Matriz Nilpotente.

$A = (a_{ij})_{nxn}$ una matriz se dice que es una matriz nilpotente si

$$\exists n \in N / A^n = 0$$

RELACIONES ENTRE MATRICES

1) Igualdad de matrices

Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{rxs}$

$$A = B \leftrightarrow \begin{cases} \text{i) Tienen el mismo orden: } m = r, n = s \\ \text{ii) } a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i,j \end{cases}$$

2) Transpuesta de una matriz

Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$ entonces la transpuesta de A denotada por A^T se define por: $A^T = (a_{ji})_{nxm}$. O sea las filas de A son columnas de A^T, las columnas de A son filas de A^T.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}_{2x4} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}_{4x2}$$

3) Matriz simétrica

$A = (a_{ij})_{nxn}$ es simétrica si $A=A^T$ o sea si: $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i,j$.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = A^T$$

4) Matriz antisimétrica

Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$ es antisimétrica si $A = -A^T$ osea si: $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i,j$.

Ej. $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -7 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ cumple $A = -A^T$

Propiedad: si A es antisimétrica, entonces los elementos de la diagonal principal son todos nulos.

5) Traza de una matriz Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$, entonces $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, Tr(A) = 1+4+3+2 = 10$$

OPERACIONES CON MATRICES

1) Suma y resta

Sean $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$ entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -8 & 7 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 14 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Apreciación: Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y otra antisimetrica.

2) Multiplicación

a) Multiplicación de una matriz por un escalar: Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $k \in R \Rightarrow kA = (ka_{ij})_{mxn}$

Ej.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 3 & 10 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow -2A=\begin{pmatrix}2 & -8 & -10\\ -6 & -20 & -4\end{pmatrix}$$

b) Multiplicación de dos matrices:

Sean: $A = (a_{ik})_{mxp}$

$B = (b_{kj})_{pxn}$

entonces $A_{mxp}.B_{pxn} = C = (c_{ij})_{mxn}$

C es la matriz producto de A y B, en ese orden.

Para obtener el elemento c_{ij} de C se considera la fila i de A y la columna j de B y se efectúa:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

Ej.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}_{2x2} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\Rightarrow A.B = C = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{32} & c_{23}\end{pmatrix}_{2x3}$$

$$c_{11} = (1\ 2)\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} = (1)(-1)+(2)(2) = 3$$

$$c_{12} = (1\ 2)\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix} = (1)(3)+(2)(-4) = -5$$

$c_{13} = (1)(0) + (2)(5) = 10$

$c_{21} = (-3)(-1)+(4)(2) = 11$

$c_{22} = (-3)(3)+(4)(-4) = -25$

$c_{23} = (-3)(0)+(4)(5) = 20$

$$\therefore C = \begin{pmatrix}3 & -5 & 10\\ 11 & -25 & 20\end{pmatrix}$$

3) Potencia de matrices

Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$

$A^o = I$

$A^1 = A$

$A^2 = A.A$

$A^3 = A^2.A$

$A^n = A^{n-1}.A$

$A^m.A^n = A^{m+n} = A^n.A^m$, m y n $\in$ N

Propiedades

1) $A.B \neq B.A$ en general
2) Si AB = 0 no implica que A = 0 ó B = 0.
3) $A.I = I.A = A$, $\forall$ $A = (a_{ij})_{nxn}$
4) $I^k = I$, $k \in N$
5) $A.(B \pm C) = A.B \pm A.C$
6) $(A + B)^T = A^T + B^T$
7) $(AB)^T = B^T.A^T$
8) $(A^T)^T = A$
9) Si AB = AC no implica que B = C
10) $(A^n)^T = (A^T)^n$
11) Tr (A + B) = Tr (A) + Tr (B)
    Tr (kA) = k Tr (A), $k \in R$
12) Tr(AB) = Tr(BA).
13) Tr(A)=Tr(A^T), A una matriz cuadrada.

INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$, si existe $B = (b_{ij})_{nxn}$ tal que AB = BA = I, entonces B es la inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$

$\therefore$ $A.A^{-1} = A^{-1}.A = 1$

Para: A de orden 2

$$\text{Si}: A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}{|A|}$$

Donde $|A| = a.d. - bc \neq 0$

Ej.

$$\text{Si}: A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}}{(2)(1)-(3)(-1)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Apreciación. Para matrices de orden mayor a 2x2, se recomienda usar la definición o transformaciones elementales filas.

PROPIEDADES

1) $(A^{-1})^{-1} = A$, A invertible.
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$, A,B invertibles
3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $k \in R \setminus \{0\}$
4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5) $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

DETERMINANTES

El determinante es una función cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y cuyo rango esta contenido en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$).

$A = (a_{ij})_{nxn} \xrightarrow{Det=|\,|} Det(A) \in \mathbb{R}$

Notación:
Det(A); $|A|$

Cálculo de un determinante:
Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$
Si $n = 1$ $A = [a_{11}] \to |A| = a_{11}$

Si $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Si $n = 3$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Por la regla de Sarrus

$|A| = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}) - (a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{11} + a_{32}\, a_{23} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12})$

Si $n \geq 3$ se calcula por el método de los cofactores.

Propiedades de la determinante:

1) Si a una fila (o columna) se le suma k veces otra fila (o columna) el valor del $|A|$ no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2+3f_1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 17 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = |A|$$

2) El $|A|$ cambia de signo si dos filas (o dos columnas) se intercambian simultáneamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & y & 2 \\ -2 & 4 & e & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & x & y & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & e & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3) Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos iguales a cero entonces el $|A| = 0$.

4) Si 2 filas (o columnas) son iguales o proporcionales entonces el $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ x & y & z \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} \to |A| = 0$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

5) Sea A una matriz triangular superior o inferior, entonces $|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 7.2.4 = 56$$

6) Si una fila o una columna es multiplicado por una constante la determinante de la matriz queda multiplicado por dicha constante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7m & 9 & k \\ 5m & 1 & 3k \\ -m & 4 & k \end{vmatrix} = mk \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

7) $|A| = |A^T|$
8) $|AB| = |A|\,|B|$
9) $|kA| = k^n|A|$, A de orden nxn.
10) $|I| = 1$
11) $AA^{-1} = I \to |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$, $|A| \neq 0$
12) $|A^n| = |A|^n$